Mehaničke oscilacije

Osnovni pojmovi

- Oscilatorno kretanje je periodično kretanje koje se vrši po istoj putanji.
- Najprostiji slučaj – restituciona sila se menja proporcionalno sa elongacijom:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{x} \qquad x = x_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right)$$

- Period oscilovanja prostog harmonijskog oscilatora:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Period oscilovanja fizičkog klatna:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot s}}$$

- Energija oscilatornog kretanja kod prostog harmonijskog oscilatora:

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x^2 \qquad E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \left(x_0{}^2 - x^2\right)$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_0{}^2$$

Zadaci

- **Z1**. Napisati jednačinu prostog harmonijskog oscilatornog kretanja ako je $a_{\max}$ = 49,3 cm/s^2, period oscilovanja T = 2 s i u trenutku t = 0 s elongacija iznosi x = 25 mm.

Rešenje:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),\ \upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x \Rightarrow a_{\max} = \omega^2 \cdot x_0$$

$$\omega = \pi \ \mathrm{rad/s}$$

$$x_0 = \frac{a_{\max} \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} = 5\,\mathrm{cm}$$

$$x(t=0) = x_0 \cdot \sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = x / x_0 = 1/2 \Rightarrow \varphi = \pi/6$$

$$x = 5 \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi/6)\,\mathrm{cm}$$

- **Z2**. Mala kuglica mase m = 2 g vrši harmonijsko oscilovanje sa frekvencijom ν = 0,5 Hz. Amplituda oscilovanja je x_0 = 3 cm. Odrediti:

  a) brzinu kuglice u trenutku kada je njena elongacija x = 1,5 cm,

  b) maksimalnu silu koja deluje na kuglicu.

  Kuglicu smatrati materijalnom tačkom.

Rešenje:

a)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ \upsilon &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = x_0{}^2$$

$$\upsilon = \pm\omega \cdot \sqrt{x_0{}^2 - x^2} = \pm 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \sqrt{x_0{}^2 - x^2} = \pm 8{,}16\,\mathrm{cm/s}$$

b)

$$F = k \cdot |x| = m \cdot \omega^2 \cdot |x| \Rightarrow F_{\max} = m \cdot \omega^2 \cdot x_0 = m \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot x_0$$

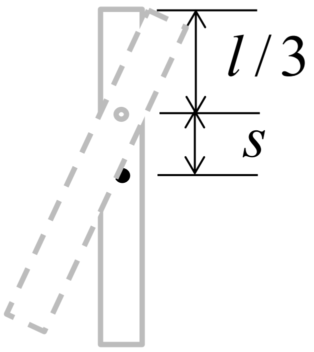
$$F_{\max} = 0{,}6\,\mathrm{mN}$$

Zadaci

- **Z3**. Harmonijski štap mase m i dužine l vrši male oscilacije oko horizontalne ose koja prolazi kroz štap na rastojanju $l/3$ od njegovog kraja. Odrediti period malih oscilacija štapa. Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase je: $I_0 = m \cdot l^2 / 12$.

Rešenje:

$$\left.\begin{aligned} I &= I_0 + m \cdot s^2 \\ s &= l/2 - l/3 = l/6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \frac{m \cdot l^2}{12} + \frac{m \cdot l^2}{36} = \frac{m \cdot l^2}{9}$$

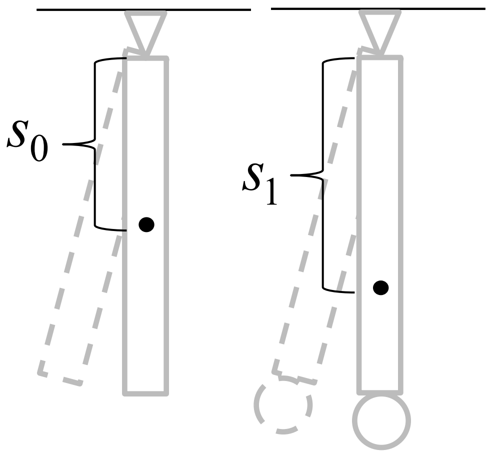


$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot s}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}}$$

Zadaci

- **Z4**. Štap mase M i dužine l može da vrši male oscilacije oko horizo-ntalne ose koja prolazi kroz kraj štapa pri čemu je period oscilovanja štapa T_0. Odrediti koliki će biti period oscilovanja štapa ako se na kraj štapa doda kugla mase M. Kugla se u odnosu na štap može smatrati materijalnom tačkom. Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase je: $I_C = M \cdot l^2 / 12$.

Rešenje:



$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{M \cdot g \cdot s_0}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_C + M \cdot s_0{}^2}{M \cdot g \cdot s_0}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot l}{3 \cdot g}}$$

$$s_1 = \frac{M \cdot l / 2 + M \cdot l}{2 \cdot M} = \frac{3}{4} \cdot l$$

$$T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_1}{2 \cdot M \cdot g \cdot s_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{I_0 + M \cdot l^2}{2 \cdot M \cdot g \cdot s_1}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot l}{9 \cdot g}}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- **Z5**. Fizičko klatno osciluje oko horizontalne ose malom ugaonom amplitudom. Period oscilovanja je T. Osa rotacije nalazi se na rastojanju s_1 = 9 cm od centra mase klatna. Ako se osa rotacije paralelno pomeri na rastojanje s_2 = 16 cm od centra mase period oscilovanja se neće promeniti. Odrediti minimalni period oscilovanja ovog klatna i rastojanje centra mase klatna od ose rotacije u tom slučaju.

Rešenje:

$$\left.\begin{array}{l} T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{I_1}{m\cdot g\cdot s_1}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\dfrac{I_2}{m\cdot g\cdot s_2}} \\ I_1 = I_0 + m\cdot {s_1}^2, I_2 = I_0 + m\cdot {s_2}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow I_0 = m\cdot s_1\cdot s_2$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0 \Rightarrow I_0 = m\cdot {s_{\min}}^2 \Rightarrow s_{\min} = \sqrt{s_1\cdot s_2}$$

$$s_{\min} = 12\,\mathrm{cm}$$

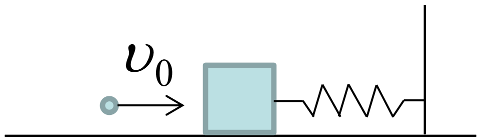
$$T_{\min} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{2\cdot s_{\min}}{g}} = 0{,}983\,\mathrm{s}$$

Zadaci

- **Z6**. Telo mase M leži na horizontalnoj glatkoj podlozi, vezano je za oprugu krutosti k i privršćeno za vertikalni zid. U to telo udara metak mase m koji se kreće brzinom υ_0. Ako je sudar idealno neelastičan, odrediti:

  a) amplitudu oscilovanja opruge nakon sudara,

  b) period oscilovanja opruge.



Rešenje:

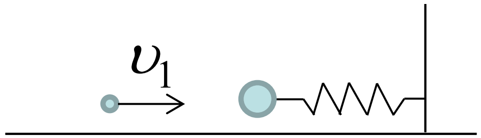
a) $m \cdot \upsilon_0 = (m+M) \cdot \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \dfrac{m}{m+M} \cdot \upsilon_0$

$$\frac{1}{2} \cdot (m+M) \cdot \upsilon_1^{\,2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^{\,2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{m+M}{k}} \cdot \upsilon_1 = \frac{m \cdot \upsilon_0}{\sqrt{k \cdot (m+M)}}$$

b) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$

- **Z7**. Kuglica koja je vezana za elastičnu oprugu harmonijski osciluje na glatkoj podlozi. Amplituda oscilovanja je x_0, a kružna frekvencija ω. Metak koji se kreće brzinom υ_1 u pravcu oscilovanja kuglice udari u nju i zaustavi se u njoj u trenutku kada ona prolazi kroz ravnotežni položaj, krećući se u istom smeru kao i metak. Odrediti novu amplitudu oscilovanja x_{01}, ako je masa metka jednaka masi kuglice. Masu opruge, otpor vazduha i trenje zanemariti.

Rešenje:



$$\frac{1}{2}\cdot m_{\mathrm{k}}\cdot\upsilon^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x_0{}^2\Rightarrow\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{k}}}}\cdot x_0=\omega\cdot x_0$$

$$m_{\mathrm{k}}\cdot\upsilon+m_{\mathrm{m}}\cdot\upsilon_1=\left(m_{\mathrm{k}}+m_{\mathrm{m}}\right)\cdot\upsilon'\Rightarrow\upsilon'=\frac{m_{\mathrm{k}}\cdot\upsilon+m_{\mathrm{m}}\cdot\upsilon_1}{m_{\mathrm{k}}+m_{\mathrm{m}}}=\frac{\upsilon+\upsilon_1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(m_{\mathrm{k}}+m_{\mathrm{m}}\right)\cdot\upsilon'^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot x_{01}{}^2\Rightarrow x_{01}{}^2=\frac{2\cdot m_{\mathrm{k}}}{k}\cdot\left(\frac{\omega\cdot x_0+\upsilon_1}{2}\right)^2=\frac{\left(\omega\cdot x_0+\upsilon_1\right)^2}{2\cdot\omega^2}$$

$$x_{01}=\frac{\omega\cdot x_0+\upsilon_1}{\omega\cdot\sqrt{2}}$$

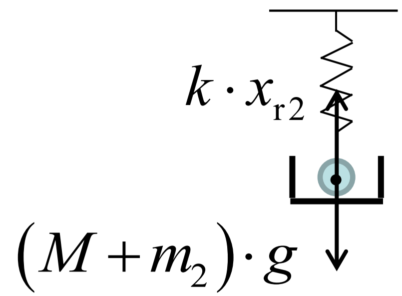
Zadaci

- **Z8**. Za slobodan kraj vertikalne opruge, čija se masa može zanemariti, okačen je tas mase M = 20 g na kome se nalazi teg mase m_1 = 5 g. Ako se opruga izvede iz ravnotežnog položaja sistem osciluje periodom T_1 = π/3 s. Nakon toga se teg mase m_1 zameni tegom mase m_2 = 25 g. Odrediti izduženje (promenu dužine) opruge u ravnotežnom položaju. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2.

Rešenje:

$$T_1 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(M+m_1)/k} \Rightarrow k = \frac{4\cdot\pi^2\cdot(M+m_1)}{T^2}$$

$$x_{r2} = \frac{(M+m_2)\cdot g}{k} = \frac{M+m_2}{M+m_1}\cdot\frac{g\cdot T^2}{4\cdot\pi^2} = 49{,}05\,\mathrm{cm}$$



Zadaci

- **D1**. Čestica mase m = 1 g vrši harmonijske oscilacije, čija je amplituda x_0 = 1 m. U trenutku kada se čestica nalazi na rastojanju x = 0,4 m od ravnotežnog položaja njena brzina iznosi υ = 0,5 m/s. Odrediti silu koja deluje na česticu u tački u kojoj je njena potencijalna energija dva puta veća od njene kinetičke energije.

Rešenje:

$$F = 2,47 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N}$$

Zadaci

- **D2**. Telo mase m = 0,05 kg pričvršeno je na kraj spiralne opruge krutosti k = 5 N/m i vrši proste harmonijske oscilacije amplitude x_0 = 2 cm po glatkoj horizontalnoj podlozi. Odrediti:
  - a) frekvenciju i period oscilovanja,
  - b) maksimalnu kinetičku energiju i totalnu energiju tela.

Rešenje:

a)
$$T = 0{,}63\,\mathrm{s}$$
$$\nu = 1{,}59\,\mathrm{Hz}$$

b)
$$E_{\mathrm{k,max}} = E_{\mathrm{tot}} = 1\,\mathrm{mJ}$$

- **D3**. Disk osciluje kao fizičko klatno najpre oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O_1 koja je udaljena s_1 = $R/3$ od centra diska, a zatim oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O_2 koja je udaljena s_2 = $2R/3$ od centra diska. Moment inercije diska u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase je $I_0 = m \cdot R^2 / 2$. Odrediti odnos perioda malih oscilacija diska u ova dva slučaja.

Rešenje:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1{,}136$$

- **D4**. Tanak homogeni disk mase m i poluprečnika R vrši male oscilacije u vertikalnoj ravni oko horizontalne ose koja prolazi kroz disk na rastojanju $s = R/3$ od oboda diska. Odrediti period malih oscilacija diska oko ove ose. Moment inercije diska za osu koja prolazi kroz centar mase diska je: $I_C = m \cdot R^2 / 2$.

Rešenje:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot R}{12 \cdot g}}$$

Zadaci

- **D5**. Na štap dužine L i mase m koji može da rotira u vertikalnoj ravni u odnosu na horizontalnu osu koja prolazi kroz njegov vrh pričvršćena je kugla mase m. Odrediti na kom rastojanju od vrha štapa treba da bude pričvršćena kugla tako da period malih oscilacija ovog sistema bude minimalan. Kugla se može smatrati materijalnom tačkom. Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar mase iznosi $I_C = m \cdot L^2 / 12$.

Rešenje:

$$x = L \cdot \frac{\sqrt{7/3} - 1}{2}$$

- **D6**. Kuglica koja je vezana za elastičnu oprugu harmonijski osciluje na glatkoj horizontalnoj podlozi. Amplituda oscilovanja je x_0, a kružna frekvencija ω. Metak koji se kreće brzinom υ_1 u pravcu oscilovanja kuglice udari u nju i zaustavi se u njoj u trenutku je opruga maksimalno istegnuta. Odrediti novu amplitudu oscilovanja x_{01} i novu kružnu učestanost ω_1, ako je masa metka tri puta manja od mase kuglice. Masu opruge, otpor vazduha i trenje zanemariti.

Rešenje:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega, x_{01} = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{\upsilon_1}^2}{12 \cdot \omega^2}}$$

Zadaci

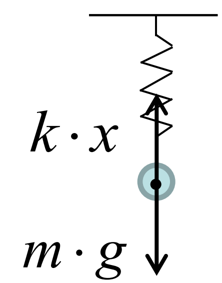
- **D7**. Na oprugu krutosti k okači se teg mase m = 60 g. Teg se izvede iz ravnotežnog položaja za rastojanje x_0 i u trenutku t_0 = 0 pusti nakon čega sistem počne harmonijski da osciluje. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2. Odrediti:

  a) krutost opruge k, ako je period oscilovanja T = 0,6 s,

  b) rastojanje x_0, ako energija elastične deformacije opruge nakon vremena t_1 = $T/8$ od početka oscilovanja iznosi $E_p(t_1)$ = 0,01 J,

  c) rezultantnu silu koja deluje na teg u trenutku t_2 = $T/6$.

Rešenje:



a) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k} \Rightarrow k = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2} = 6{,}58\,\mathrm{N/m}$

b) $\upsilon = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$

$$m \cdot g = k \cdot x_r \Rightarrow x_r = m \cdot g / k$$

$$\upsilon(t=0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm \pi / 2$$

$$E_p(t_1) = k \cdot (x_r + x_1)^2 / 2 = k \cdot (x_r + x_0 \cdot \sin(\omega \cdot T/8 \pm \pi/2))^2 / 2$$

$$\varphi_0 = -\pi/2 \qquad x_0 = \left(x_r \pm \sqrt{2 \cdot E_p(t_1)/k}\right) \cdot \sqrt{2} \qquad x_{01} = 4{,}85\,\mathrm{cm},\ x_{02} = 20{,}43\,\mathrm{cm}$$

c) $F_{rez} = k \cdot |x_2| = k \cdot x_0 / 2,\ F_{rez1} = 0{,}159\,\mathrm{N},\ F_{rez2} = 0{,}672\,\mathrm{N}$