

Sudari

- Sudari mogu biti elastični ili neelastični.

- Pri elastičnom sudaru dva tela:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

$$E_{k1} + E_{k2} = E_{k1}' + E_{k2}'$$

- Kod neelastičnog sudara:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Deo ukupne energije troši se na deformaciju.

- **Z1.** Telo u kretanju mase m_1 udara u nepomično telo mase m_2 . Smatrajući sudar plastičnim i čeonim, odrediti koji se deo prvobitne kinetičke energije prvog tela pretvori u toplotu.

Rešenje:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12}$$

$$E_{k1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}$$

$$E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2}{2}$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta E_k}{E_{k1}} \right| = \frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} = 1 - \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = 1 - \frac{(m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2}{m_1 \cdot v_1^2} = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

- **Z2.** Dve kuglice masa $m_1 = 10 \text{ g}$ i $m_2 = 20 \text{ g}$ obešene su na tankim nitima jednake dužine $l = 18 \text{ cm}$, tako da se nalaze na istoj visini i dodiruju se. Kuglica mase m_2 izvede se iz ravnotežnog položaja tako da zaklapa ugao $\theta = 60^\circ$ u odnosu na ravnotežni položaj, a zatim se pusti da udari u drugu kuglicu. Odrediti do koje će maksimalne visine u odnosu na ravnotežni položaj doći kuglice nakon sudara smatrajući da je sudar čeon i plastičan.

Rešenje:

pre sudara:

$$E_{2p} = m_2 \cdot g \cdot h_1 = m_2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \theta)$$

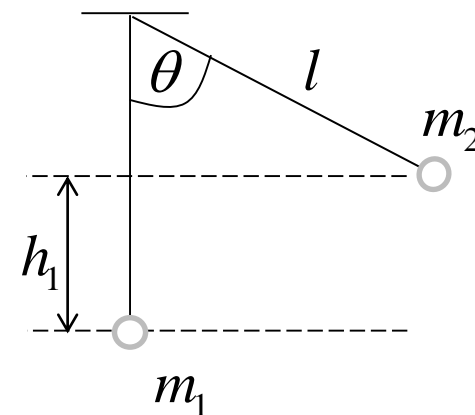
$$E_{2k} = m_2 \cdot v_2^2 / 2 = E_{2p} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \theta)}$$

sudar:

$$m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_{12} \Rightarrow v_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_2$$

posle sudara:

$$\frac{(m_1 + m_2) \cdot v_{12}^2}{2} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h_{12} \Rightarrow h_{12} = \frac{v_{12}^2}{2 \cdot g} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot l \cdot (1 - \cos \theta) = 4 \text{ cm}$$



- **Z3.** Telo mase $m_1 = 2$ kg kreće se brzinom $v_1 = 3$ m/s i udari u drugo telo mase $m_2 = 3$ kg koje se kreće brzinom $v_2 = 1$ m/s po istoj putanji i u istom smeru. Odrediti brzinu ovih tela nakon sudara ako je sudar čeon i:
 - a) plastičan,
 - b) elastičan.

Rešenje:

$$a) \quad m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \\ m_1 \cdot \frac{v_1^2}{2} + m_2 \cdot \frac{v_2^2}{2} = m_1 \cdot \frac{v_1'^2}{2} + m_2 \cdot \frac{v_2'^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \end{array} \right.$$

$$v_1' = 0,6 \text{ m/s}, \quad v_2' = 2,6 \text{ m/s}$$

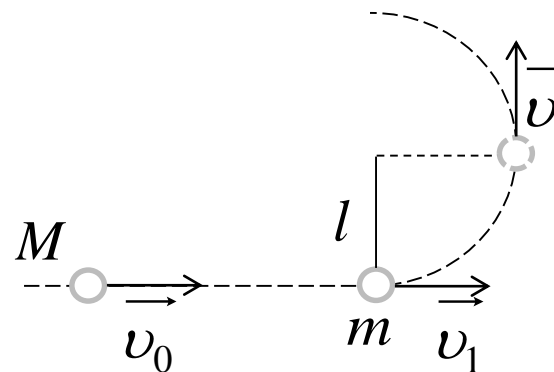
- **Z4.** Lopta mase $m = 0,5$ kg visi na lakom neistegljivom koncu dužine $l = 0,75$ m. U početnom trenutku konac miruje u vertikalnom položaju sa loptom na donjem kraju. U loptu udara telo mase $M = 1,5$ kg koje se kreće u horizontalnom pravcu. Nakon toga lopta počinje da se kreće po krugu u vertikalnoj ravni i u trenutku kada je konac u horizontalnom položaju ima brzinu $v = 5$ m/s. Sudar lopte i tela smatrati elastičnim. Ubrzanje slobodnog padanja je $g = 9,81$ m/s². Odrediti:
 - brzinu tela neposredno pre sudara sa loptom,
 - brzinu lopte i silu zatezanja konca, kada je on u vertikalnom položaju sa loptom na gornjem kraju.

Rešenje:

$$a) \quad M \cdot v_0 = m \cdot v_1 + M \cdot v_0'$$

$$\frac{M \cdot v_0^2}{2} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + \frac{M \cdot v_0'^2}{2}$$

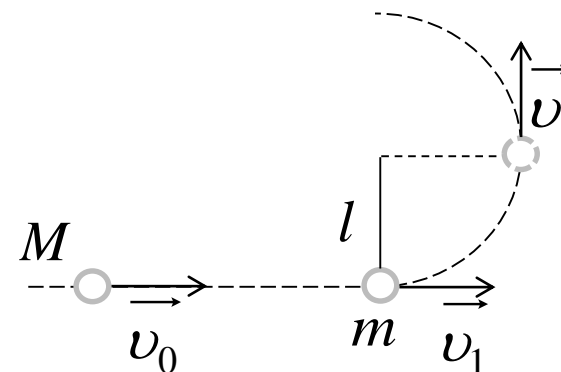
$$v_0 = \frac{v_1}{2} \cdot \left(1 + \frac{m}{M} \right)$$



a)

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot l \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot l}$$

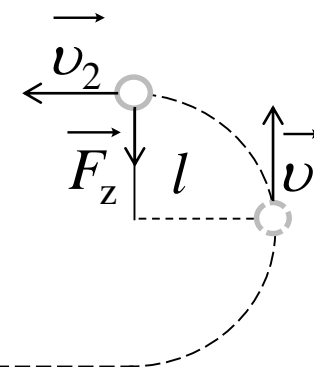
$$v_0 = \frac{\sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot l}}{2} \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



b)

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m \cdot g \cdot l \Rightarrow v_2 = \sqrt{v^2 - 2 \cdot g \cdot l} = 3,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$F_z + m \cdot g = m \cdot \frac{v_2^2}{l} \Rightarrow F_z = 1,9 \text{ N}$$



- **Z5.** Čestica mase m_1 koja miruje pretrpi elastičan sudar sa česticom mase m_2 koja naleti na nju. Pri tome se obe čestice raseju simetrično u odnosu na pravac kretanja čestice mase m_2 pre sudara. Odrediti odnos m_1/m_2 ako posle sudara ugao između vektora njihovih brzina iznosi $\alpha = 60^\circ$.

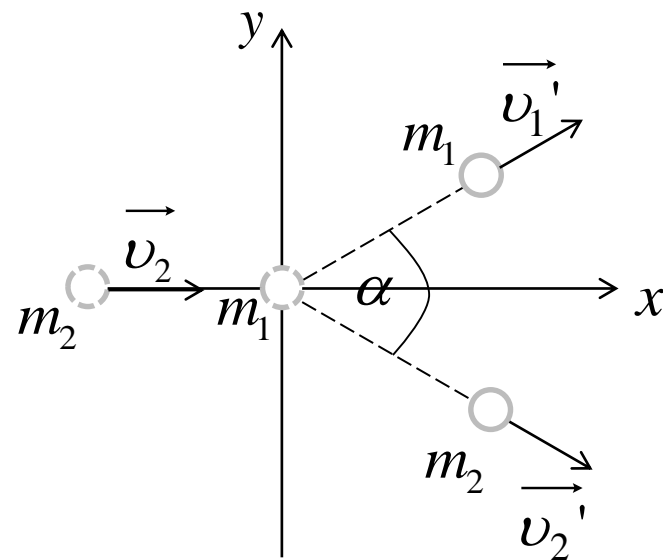
Rešenje:

$$m_2 \cdot v_2 = m_2 \cdot v_2' \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + m_1 \cdot v_1' \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$0 = m_1 \cdot v_1' \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - m_2 \cdot v_2' \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} + \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{1}{2}$$



- **Z6.** Materijalna tačka (projektil) mase m i brzine v_1 elastično se sudara sa raštrkavanjem sa drugom materijalnom tačkom mase $m/3$ koja miruje. Odrediti:
 - a) zavisnost brzine projektila posle sudara od brzine v_1 i ugla rasejanja projektila θ , pod pretpostavkom da je taj ugao oštar,
 - b) maksimalnu vrednost ugla rasejanja,
 - c) relativno smanjenje kinetičke energije projektila pri maksimalnom uglu rasejanja.

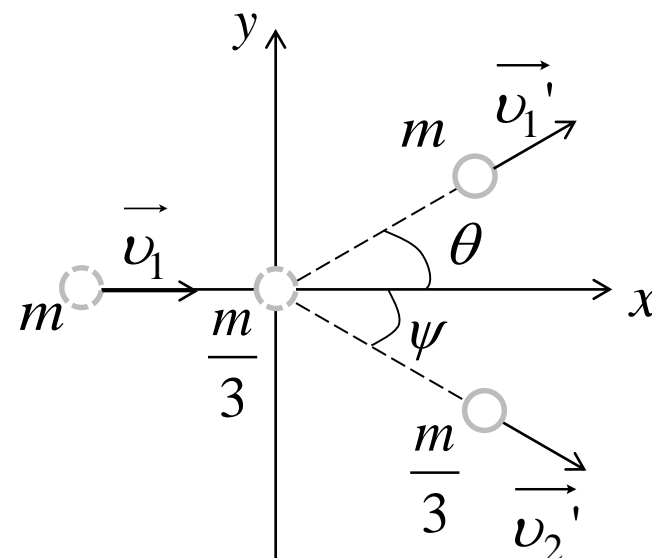
Rešenje:

a)

$$m \cdot v_1 = m \cdot v_1' \cdot \cos \theta + \frac{m}{3} \cdot v_2' \cdot \cos \psi$$

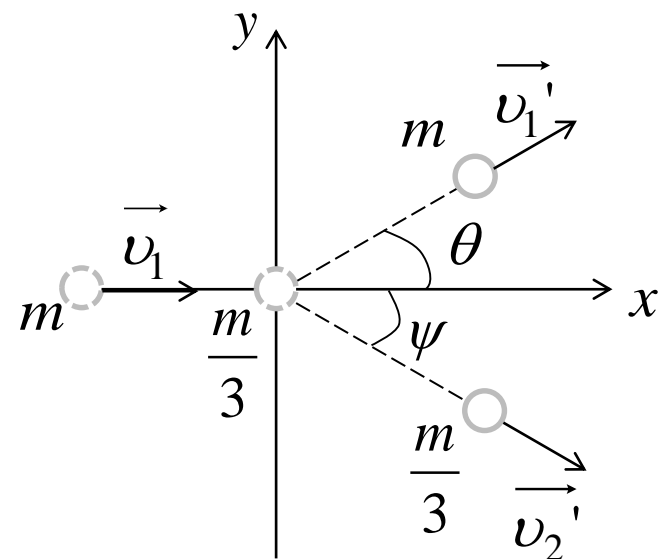
$$m \cdot v_1' \cdot \sin \theta - \frac{m}{3} \cdot v_2' \cdot \sin \psi = 0$$

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_1'^2}{2} + \frac{m \cdot v_2'^2}{6}$$



$$\left. \begin{aligned}
 v_2' \cdot \cos \psi &= 3 \cdot (v_1 - v_1' \cdot \cos \theta) \\
 v_2' \cdot \sin \psi &= 3 \cdot v_1' \cdot \sin \theta \\
 v_2'^2 &= 3 \cdot v_1^2 - 3 \cdot v_1'^2
 \end{aligned} \right\} \dots \Rightarrow$$

$$v_1' = v_1 \cdot \frac{3 \cdot \cos \theta \pm \sqrt{1 - 9 \cdot \sin^2 \theta}}{4}$$



b)

$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{1}{3} = 19,47^\circ$$

c)

$$\left| \frac{\Delta E_{k1}}{E_{k1}} \right| = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1^2} = 0,5$$

- **D1.** Čekić mase $m = 100$ kg padne sa visine $H = 3,2$ m na nakovanj mase $M = 300$ kg koji se nalazi na elastičnoj podlozi. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi $g = 10$ m/s². Posle udara čekića u nakovanj oni se kreću nadole zajedno. Odrediti brzinu čekića i nakovnja nakon sudara.

Rešenje:

$$v_{\check{c}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m \cdot v_{\check{c}} = (m + M) \cdot v_{\text{n}\check{c}} \Rightarrow v_{\text{n}\check{c}} = \frac{m}{m + M} \cdot v_{\check{c}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **D2.** Dva jednaka čamca masa $M = 180$ kg se kreću paralelnim pravcima, jedan drugom u susret, brzinama $v_1 = 5$ m/s i $v_2 = 3$ m/s. Na čamcima se nalazi po paket mase $m = 20$ kg. U trenutku mimoilaženja, sa svakog od čamaca se na drugi čamac prebaci paket. Odrediti brzine čamaca nakon razmene paketa.

Rešenje:

$$\left. \begin{array}{l} (M + m) \cdot v_1' = M \cdot v_1 - m \cdot v_2 \\ (M + m) \cdot v_2' = M \cdot v_2 - m \cdot v_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1' = \frac{M \cdot v_1 - m \cdot v_2}{M + m} = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2' = \frac{M \cdot v_2 - m \cdot v_1}{M + m} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \right.$$

- **D3.** Telo mase m započne kretanje iz stanja mirovanja niz idealno glatku strmu podlogu visine H . Na dnu strme ravni telo uleće u kolica mase $M = m$, a paralelno ravnoj podlozi na kojoj stoje kolica. Nakon toga telo zajedno sa kolicima pređe put $s = 2 \cdot H$ do potpunog zaustavljanja. Odrediti:
 - a) brzinu tela na dnu strme ravni pre uletanja u kolica,
 - b) brzinu sistema telo-kolica nakon uletanja tela u kolica,
 - c) koeficijent trenja između kolica i ravne podloge.

Rešenje:

a)

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

b)

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

c)

$$\mu = 0,125$$

- **D4.** O kanap dužine L , zanemarljive mase, obešeno je telo mase M , koje se može smatrati materijalnom tačkom u odnosu na dužinu kanapa. U horizontalnom pravcu normalno na kanap kreće se metak mase m i zariva se u telo, nakon čega se telo sa metkom otkloni iz ravnotežnog položaja za ugao $\theta = \pi/3$. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g . Odrediti:
 - a) brzinu metka pre udara u telo,
 - b) odnos kinetičkih energija metka pre i posle sudara.

Rešenje:

$$\text{a) } v = \frac{m + M}{m} \cdot \sqrt{g \cdot L}$$

$$\text{b) } \frac{E_{k,\text{posle}}}{E_{k,\text{pre}}} = \left(\frac{m}{m + M} \right)^2$$

- **D5.** Dve materijalne tačke (projektili) istih masa m i istih brzina v_1 sudaraju se idealno neelastično (plastično) sa materijalnom tačkom mase $3 \cdot m$ koja miruje. Projektili su se pre sudara kretali pravcima koji zaklapaju ugao $\alpha = 60^\circ$.
Odrediti:
 - a) brzinu kojom će se ove tri materijalne tačke kretati nakon sudara,
 - b) pravac i smer njihovog kretanja nakon sudara (nacrtati sliku),
 - c) relativnu promenu ukupne kinetičke energije sistema.

Rešenje:

a)

$$v_2 = 0,35 \cdot v_1$$

c)

$$\frac{\Delta E_k}{E_k} = -70\%$$

- **D6.** Čestica mase m sudara se sa česticom mase M koja do sudara miruje. Kao rezultat sudara čestica mase m se raseje pod uglom $\theta = 90^\circ$, a čestica mase M uzmakne pod uglom od $\varphi = \pi/6$ u odnosu na prvobitni smer kretanja prve čestice. Za koliko procenata se smanji ukupna kinetička energija sistema čestica ako je $M/m = 5$?

Rešenje:

$$\left| \frac{\Delta E_k}{E_k} \right| = 40\%$$

- **D7.** Telo mase $m_1 = 1$ kg kreće se brzinom $v_1 = 5$ m/s i udara u nepomično telo mase $M = 4 \cdot m_1$. Smatrajući sudar centralnim i idealno elastičnim odrediti:
 - a) brzine oba tela nakon sudara,
 - b) relativnu promenu kinetičke energije prvog tela nakon sudara (u procentima).

Rešenje:

a) $v_m' = -3$ m/s

$$v_M' = 2$$
 m/s

b) $\frac{\Delta E_k}{E_k} = -64$ %

- **D8.** Manja kugla mase m udara u veću kuglu mase M koja pre sudara miruje. Nakon centralnog idealno elastičnog sudara veća kugla ima $4/5$ ukupne kinetičke energije. Odrediti odnos masa ovih kugli M/m .

Rešenje:

pomoć: telo mase m se odbija

$$\frac{M}{m} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

- **D9.** Kuglica mase m_1 kreće se brzinom intenziteta $v_0 = 5 \text{ m/s}$ prema kuglici mase $m_2 = 3 \cdot m_1$, koja visi o neistegljivom koncu zanemarljive mase. Rastojanje između početnih položaja kuglica je $s = 2,5 \text{ m}$. Koeficijent trenja između kuglice mase m_1 i podloge iznosi $\mu = 0,4$. Ubrzanje zemljine teže je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Smatrati da je sudar kuglica idealno elastičan. Odrediti:
 - a) brzinu kuglice mase m_1 neposredno pre sudara,
 - b) smer i intenzitet brzine kuglice mase m_1 neposredno posle sudara,
 - c) brzinu kuglice mase m_2 neposredno posle sudara.

Rešenje:

a)
$$v_1 = 2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)
$$v_1' = -1,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)
$$v_2' = 1,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **D10.** Na slobodnu kuglicu mase m_1 koja miruje naleti kuglica mase m_2 ($m_1 \neq m_2$) brzinom $v_2 = 10$ m/s. Posle idealno elastičnog sudara kuglice se raseju tako da kuglica mase m_2 nastavi kretanje pod uglom $\theta = 90^\circ$ u odnosu na prvobitni pravac kretanja, a intenzitet brzine joj se smanji na polovinu početne vrednosti. Odrediti intenzitet brzine kuglice mase m_1 posle sudara.

Rešenje:

$$v_1' = 6,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$