Termodinamika (1)

Osnovni pojmovi

- Jednačina stanja idealnog gasa:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

- Izobarski proces:

$$p = \text{const.}, A = p \cdot (V_2 - V_1), \Delta Q = m \cdot c_p \cdot \left(T_2 - T_1\right) = n \cdot C_p \cdot \left(T_2 - T_1\right)$$

$$C_p = \frac{j+2}{2} \cdot R$$

- Izohorski proces:

$$V = \text{const.}, A = 0, \Delta Q = m \cdot c_V \cdot \left(T_2 - T_1\right) = n \cdot C_V \cdot \left(T_2 - T_1\right)$$

$$C_V = \frac{j}{2} \cdot R$$

- Izotermski proces:

$$T = \text{const.}, A = \Delta Q = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Osnovni pojmovi (2)

- Adijabatski proces:

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}, T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}, T \cdot p^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = \text{const.}, \kappa = \frac{c_p}{c_V}$$

$$A = \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{1-\kappa} = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{\kappa - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}\right), \Delta Q = 0$$

- Promena unutrašnje energije gasa:

$$\Delta U = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

- Pritisak smeše idealnih gasova koji međusobno ne reaguju jednak je zbiru parcijalnih pritisaka komponenata u smeši.
- Prvi princip termodinamike (zakon održanja energije u termodinamici):

$$\Delta Q = \Delta U + A$$

toplota koja se dovede gasu jednaka je zbiru promene njegove unutrašnje energije i rada koji gas izvrši.

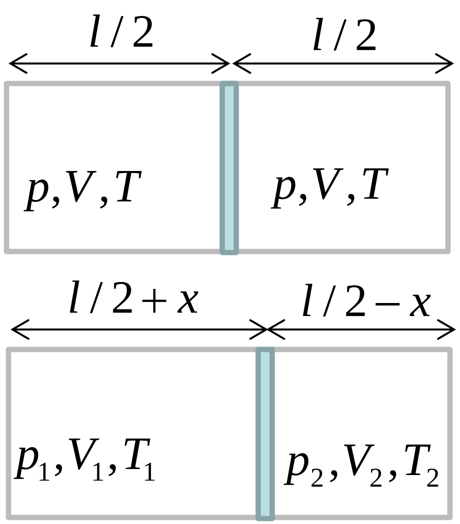
- **Z1**. Cilindrični sud zatvoren sa obe strane podeljen je na dva jednaka dela klipom koji može da klizi bez trenja. U obe polovine cilindra nalazi se vazduh jednakih temperatura i pod istim pritiscima. Odrediti za koliko će se pomeriti klip ako se vazduh u jednoj polovini cilindra dovede na temperaturu t_1 = 17°C, a vazduh u drugoj polovini na temperaturi t_2 = -13°C. Dužina cilindra iznosi l = 40 cm. Smatrati da zidovi suda i klip ne provode toplotu. Debljinu suda zanemariti.

Rešenje:

$$\frac{p\cdot V}{T}=\frac{p_1\cdot V_1}{T_1},\ \frac{p\cdot V}{T}=\frac{p_2\cdot V_2}{T_2},\ p_1=p_2$$

$$\frac{(l/2+x)\cdot S}{T_1}=\frac{(l/2-x)\cdot S}{T_2}$$

$$x=\frac{l}{2}\cdot\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}=1{,}09\,\mathrm{cm}$$



- **Z2**. Dva balona su međusobno spojena preko jedne slavine. U prvom balonu se nalazi gas pod pritiskom p_1 = 100 kPa. U drugom balonu je isti gas pod pritiskom p_2 = 50 kPa. Zapremina prvog balona iznosi V_1 = 2 l, a drugog V_2 = 8 l. Odrediti koliki će se pritisak uspostaviti u balonima pri otvaranju slavine. Smatrati da se temperatura gasa ne menja.

Rešenje:

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T$$

$$p_2 \cdot V_2 = n_2 \cdot R \cdot T$$

$$p \cdot (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) \cdot R \cdot T = p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2$$

$$p = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = 60\,\mathrm{kPa}$$

Zadaci

- **Z3**. U cilindru se nalazi zatvoreno n = 20 molova jednoatomnog idealnog gasa pod pritiskom p_1 = 10 MPa i na temperaturi t = 27°C. Odrediti:

  a) koliki rad izvrši ovaj gas pri izotermskoj ekspanziji ako mu pritisak opadne na p_2 = 0,1 MPa,

  b) do koje temperature bi se ohladio ovaj gas ako bi se adijabatski širio uz navedenu promenu pritiska i koliki rad bi izvršio u tom slučaju.

Rešenje:

a)

$$A = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = 229{,}7\,\mathrm{kJ}$$

b)

$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa},\ p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1,\ p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{p_2 \cdot V_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\kappa} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\kappa-1)/\kappa},\ T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} = 47{,}5\,\mathrm{K}$$

$$A = n \cdot C_V \cdot \left(T_1 - T_2\right) = \frac{n \cdot R}{\kappa - 1} \cdot \left(T_1 - T_2\right) = 63\,\mathrm{kJ}$$

- **Z4**. Zapremina od V = 2 l azota nalazi se pod pritiskom od p = 0,1 MPa. Odrediti količinu toplote koju treba predati azotu da bi se:
  a) pri konstantnom pritisku njegova zapremina povećala dva puta,
  b) pri konstantnoj zapremini njegov pritisak povećao dva puta.
  Poznato je C_p = 28,8 J/molK, C_V = 20,7 J/molK, R =8,3 J/molK.

Rešenje:

a)

$$\left.\begin{array}{l} Q_p = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1) \\ \dfrac{p \cdot V}{T_1} = \dfrac{p \cdot 2 \cdot V}{T_2} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_p = n \cdot C_p \cdot T_1 = \frac{C_p \cdot p \cdot V}{R} = 694\,\mathrm{J}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} Q_V = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) \\ \dfrac{p \cdot V}{T_1} = \dfrac{2 \cdot p \cdot V}{T_2} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_V = n \cdot C_V \cdot T_1 = \frac{C_V \cdot p \cdot V}{R} = 498{,}8\,\mathrm{J}$$

- **Z5**. Idealni gas se prevodi iz stanja 1 (p_1, V_1, T_1) u stanje 2 ($p_1/2, V_1/4, T_2$) na dva načina. Na prvi način gas se iz stanja 1 u stanje 2 prevodi prvo po izobari, a potom po izohori, a na drugi način prvo po izohori, a zatim po izobari. Odrediti razliku dovedenih količina toplote u ova dva slučaja.

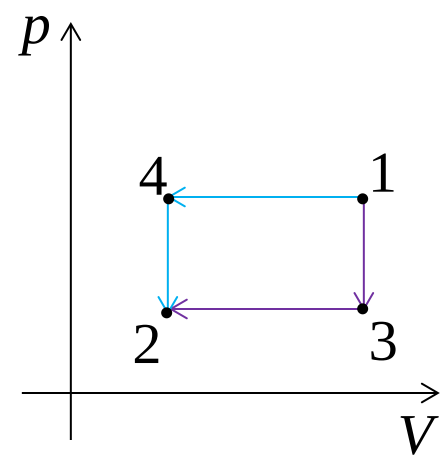
Rešenje:

$$Q_{1-3-2} = Q_{13} + Q_{32} = n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_1) + n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_3)$$

$$Q_{1-4-2} = Q_{14} + Q_{42} = n \cdot C_p \cdot (T_4 - T_1) + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_4)$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_1}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{1}{2} \cdot T_1, \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{8} \cdot T_1$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_2}{T_4} \Rightarrow T_4 = \frac{1}{4} \cdot T_1$$



$$Q_{1-4-2} - Q_{1-3-2} = \left(-n \cdot C_p \cdot \frac{3 \cdot T_1}{4} - n \cdot C_V \cdot \frac{T_1}{8}\right) - \left(-n \cdot C_V \cdot \frac{T_1}{2} - n \cdot C_p \cdot \frac{3 \cdot T_1}{8}\right)$$

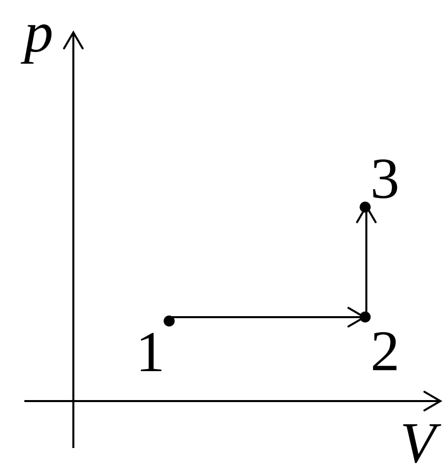
$$Q_{1-4-2} - Q_{1-3-2} = -n \cdot (C_p - C_V) \cdot \frac{3 \cdot T_1}{8} = -\frac{3}{8} \cdot n \cdot R \cdot T_1 = -\frac{3}{8} \cdot p_1 \cdot V_1$$

Zadaci

- **Z6**. Idealni dvoatomski gas nalazi se na pritisku p_1 = 100 kPa i zapremini V_1 = 3 dm^3 (stanje 1). Gas se najpre izobarski širi i prelazi u stanje 2, pre čemu mu se zapremina poveća za 50%, a zatim izohorskim procesom prelazi u stanje 3 povećavajući pri tom pritisak za 1/9 prethodne vrednosti. Odrediti:
  a) količinu toplote dovedenu gasu od stanja 1 do stanja 3,
  b) promenu unutrašnje energije gasa od stanja 1 do stanja 3,
  c) rad koji pri tom izvrši gas.

Rešenje:

a)



$$Q = Q_{12} + Q_{23} = n \cdot C_p \cdot \left(T_2 - T_1\right) + n \cdot C_V \cdot \left(T_3 - T_2\right)$$

$$Q = \frac{j+2}{2} \cdot n \cdot R \cdot \left(T_2 - T_1\right) + \frac{j}{2} \cdot n \cdot R \cdot \left(T_3 - T_2\right)$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{3}{2} \cdot T_1, \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = T_2 \cdot \frac{p_3}{p_2} = \frac{10}{9} \cdot T_2 = \frac{5}{3} \cdot T_1$$

Zadaci

$$Q=\frac{j+2}{2}\cdot n\cdot R\cdot\frac{1}{2}\cdot T_1+\frac{j}{2}\cdot n\cdot R\cdot\frac{1}{6}\cdot T_1=\frac{13}{6}\cdot n\cdot R\cdot T_1=\frac{13}{6}\cdot p_1\cdot V_1=650\,\mathrm{J}$$

b) $\Delta U=n\cdot C_V\cdot\left(T_3-T_1\right)=n\cdot\frac{j}{2}\cdot R\cdot\frac{2}{3}\cdot T_1=\frac{5}{3}\cdot p_1\cdot V_1=500\,\mathrm{J}$

c) $A=Q-\Delta U=150\,\mathrm{J}$

- **Z7**. Količina m = 14 g azota se adijabatski širi tako da mu se početni pritisak p_1 snizi pet puta. Zatim se azot izotermski sabija do početnog pritiska p_1. Početna temperatura azota iznosi T = 420 K. Odrediti:
  a) temperaturu T_2 gasa na kraju procesa,
  b) količinu toplote Q koju gas predaje,
  c) promenu unutrašnje energije azota ΔU, (M = 28 g/mol)
  d) rad koji gas izvrši prilikom ovog procesa.

Rešenje:

a)
$$T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_2 \cdot p_2^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 265{,}2\,\mathrm{K}$$

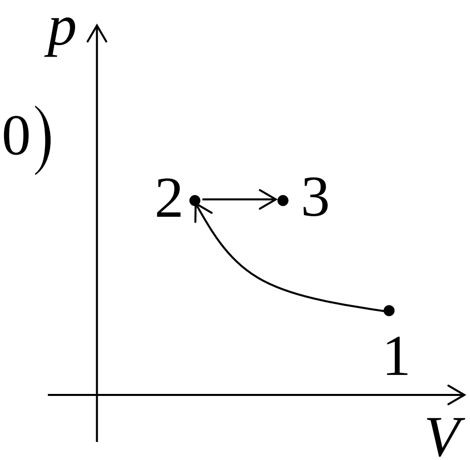
b)
$$Q_{\mathrm{pred}} = -Q_{23} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\frac{p_1}{p_2} = 1{,}77\,\mathrm{kJ}$$

c)
$$\Delta U = \Delta U_{12} = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) = \frac{n \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_2 - T_1) = -1{,}6\,\mathrm{kJ}$$

d)
$$A = Q_{23} - \Delta U = -0{,}17\,\mathrm{kJ}$$

- **Z8**. Količina od n molova idealnog jednoatomskog gasa nalazi se pod pritiskom p_1. Iz tog stanja gas se izotermski sabija do pritiska p_2 pri čemu se nad gasom vrši rad A. Nakon toga gasu se izobarski dovodi količina toplote koja je jednaka količini toplote koju je on oslobodio pri sabijanju. Odrediti krajnju zapreminu i temperaturu gasa. Univerzalna gasna konstanta iznosi R.

Rešenje:



$$A = -A_{12} = -Q_{12} = -n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}, (\Delta U = 0)$$

$$Q_{23} = A = n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2) = n \cdot \frac{j+2}{2} \cdot R \cdot (T_3 - T_2)$$

$$A = n \cdot \frac{5}{2} \cdot R \cdot (T_3 - T_2)$$

$$T_3 = \frac{A}{n \cdot R \cdot \ln p_2 / p_1} + \frac{2 \cdot A}{5 \cdot n \cdot R}, V_3 = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \frac{T_3}{p_3} = \frac{A}{p_2 \cdot \ln p_2 / p_1} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1}\right)$$

- **D1**. Čelična boca zapremine V = 50 l napunjena je vodonikom pod pritiskom p_1 = 20 MPa i na temperaturi t_1 = 27°C. Iz boce se ispušta vodonik sve dok pritisak u boci ne opadne na p_2 = 300 kPa i ohladi se do temperature t_2 = -20°C. Izračunati:
  a) masu vodonika ispuštenog iz boce,
  b) zapreminu ispuštenog vodonika pod normalnih atmosferskim pritiskom i na temperaturi t_1 = 27°C.

Rešenje:

a)

$$\Delta m = \frac{V \cdot M}{R} \cdot \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 0{,}788\,\mathrm{kg}$$

b)

$$V_0 = \frac{\Delta m \cdot R \cdot T}{p_0 \cdot M} = 9{,}8\,\mathrm{m}^3$$

- **D2**. U kom odnosu treba da budu potrebne količine toplote da bi se istoj količini helijuma (κ = 1,66):
  a) povećala zapremina dva puta pri stalnom pritisku,
  b) povisio pritisak tri puta pri stalnoj zapremini.

Rešenje:

$$\frac{Q_\mathrm{a}}{Q_\mathrm{b}} = \frac{1}{2} \cdot \kappa = 0{,}83$$

Zadaci

- **D3**. U jednom sudu sa kiseonikom vlada pritisak p_1 = 2 MPa pri temperaturi t_1 = 20°C. Izračunati:
  a) koliki procenat zapremine gasa mora naglo da istekne iz suda da bi pritisak opao na p_2 = 0,5 MPa ako nema razmene toplote sa okolinom i kolika je tada temperatura gasa t_2,
  b) koliku količinu toplote treba dovesti jednom kilogramu gasa da bi se njegova temperatura opet popela na t_1 = 20°C i koliki je tada pritisak u sudu. Specifični toplotni kapacitet kiseonika pri stalnoj zapremini je c_V = 653 J/kgK.

Rešenje:

a) $$\frac{\Delta V}{V_1} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 63\% \qquad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{\Delta V}{V_1} + 1\right)^{1-\kappa} = 197\,\mathrm{K}$$

b)

$$\frac{Q}{m} = c_V \cdot (T_1 - T_2) = 62,6\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}},\; p_3 = p_2 \cdot \frac{T_1}{T_2} = 0,74\,\mathrm{MPa}$$

- **D4**. Pri hlađenju m = 20 g helijuma zatvorenog klipom u cilindru do 0 °C potencijalna energija tega težine Q = 0,6 N, koji leži na klipu, smanji se za ΔE = 0,9 J. Površina klipa iznosi S = 5 cm^2, atmosferski pritisak p = 101 kPa, molarna masa helijuma M = 4 g/mol, a univerzalna gasna konstanta R = 8,314 J/molK. Odrediti početnu temperaturu i zapreminu helijuma.

Rešenje:

$$Q \cdot \Delta x = \Delta E \Rightarrow \Delta x = \Delta E / Q = 1{,}5\,\mathrm{m}$$

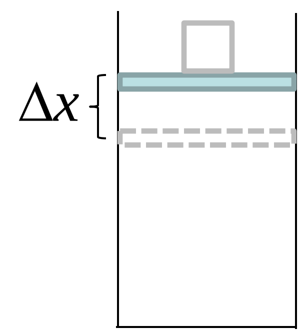
$$p_1 = p_2 = p + Q / S$$

$$A = p_1 \cdot (V_2 - V_1) = -p_1 \cdot \Delta x \cdot S = -76{,}65\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R} \cdot p_1 \cdot (V_2 - V_1) = \frac{C_V}{R} \cdot A$$

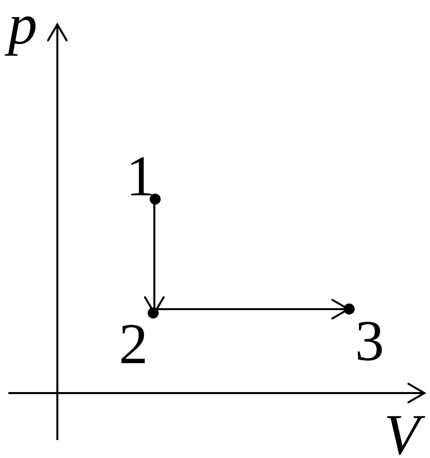
$$T_1 = T_2 - \frac{A}{n \cdot R} = 274{,}84\,\mathrm{K}$$

$$V_1 = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{p_1} = 0{,}112\,\mathrm{m}^3$$



- **D5**. U cilindru zapremine V_1 = 2 l nalazi se m = 48 g kiseonika na pritisku p_1 = 100 kPa. Izohorskim hlađenjem pritisak gasa se smanji na polovinu početne vrednosti. Gas se zatim izobarski zagreva tako da je ukupna promena unutrašnje energije jednaka nuli. Odrediti kolika je količina toplote dovedena gasu. Molarna masa kiseonika iznosi M = 32 g/mol.

Rešenje:



$$Q_{23} = \frac{7}{4} \cdot p_1 \cdot V_1 = 350\,\mathrm{J}$$

(ako se računa stvarno dovedena toplota u procesu 2-3)

$$Q_{12} + Q_{23} = \frac{1}{2} \cdot p_1 \cdot V_1 = 100\,\mathrm{J}$$

(ako se sva toplota računa kao dovedena)

Zadaci

- **D6**. Masa m = 200 g vodonika izobarski se zagreva od t_1 = 0 °C do t_2 = 100 °C. Izračunati:
  a) kolika je količina toplote utrošena za zagrevanje,
  b) koliki se spoljni rad pri tome izvrši.
  (M = 2 g/mol)

Rešenje:

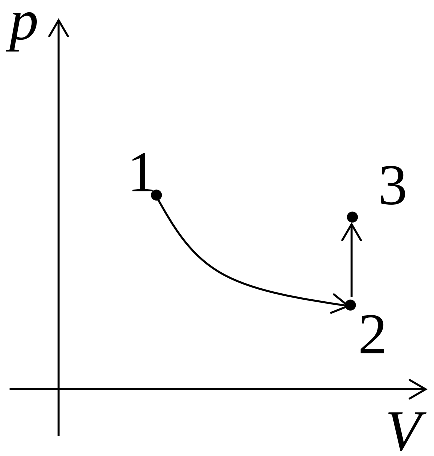
a) $Q = 0{,}29\,\mathrm{MJ}$

b) $A = 83{,}14\,\mathrm{kJ}$

- **D7**. Masa m = 5 g azota (M = 28 g/mol) nalazi se na pritisku p = 100 kPa i temperaturi T = 300 K (stanje 1). Gas se izotermski širi i prelazi u stanje 2, pri čemu se zapremina poveća za 30%. Zatim gas izohorskim procesom prelazi u stanje 3. Ukupna dovedena količina toplote pri prelasku gasa iz stanja 1 u stanje 3 iznosi Q = 400 J. Univerzalna gasna konstanta iznosi R = 8,314 J/molK. Dati proces predstaviti na p-V dijagramu, a zatim odrediti:
  a) rad koji gas izvrši pri prelasku iz stanja 1, preko stanja 2 u stanje 3,
  b) promenu unutrašnje energije gasa pri prelasku iz stanja 1 u stanje 3.

Rešenje:

a) $A = 116{,}85\,\mathrm{J}$



b) $\Delta U = 283{,}14\,\mathrm{J}$

- **D8**. Masa m = 14 g dvoatomskog idealnog gasa azota (M = 28 g/mol) nalazi se na temperaturi T_1 = 300 K. Iz tog stanja (1) gas prelazi u stanje (2) izobarskim procesom, pri čemu mu se zapremina poveća za 30%. Zatim gas adijabatskim procesom prelazi u stanje (3) tako da mu se zapremina poveća za 10% u odnosu na stanje (2). Odrediti:
  a) dovedenu količinu toplote,
  b) rad koji izvrši gas,
  c) promenu unutrašnje energije gasa u celom procesu 1-2-3.
  Vrednost univerzalne gasne konstante je R = 8,314 J/molK.

Rešenje:

a) $Q = 1309,4\,\mathrm{J}$

b) $A = 525,7\,\mathrm{J}$

c) $\Delta U = 783,7\,\mathrm{J}$