

Mehanički talasi

- Talasno kretanje je periodično prenošenje energije oscilacije kroz elastičnu sredinu. Talasi mogu biti transverzalni ili longitudinalni.
- Brzina prostiranja talasa:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad c = \sqrt{\frac{p \cdot \kappa}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}}$$

- Talasna dužina – rastojanje dve najbliže tačke u talasu u istom stanju oscilovanja / rastojanje do kojeg se proširi talas za vreme jedne pune oscilacije:

$$\lambda = c \cdot T = c / \nu$$

- Talasna jednačina:

$$\psi = \psi_0 \cdot \sin \omega \cdot (t - x / c) = \psi_0 \cdot \sin (\omega \cdot t - k \cdot x)$$

- Na granici dve sredine, dolazi do prelamanja i odbijanja talasa. Pri odbijanju o gušću sredinu dolazi do promene faze talasa za π .

- Žica zategnuta na oba kraja, vazdušni stub otvoren na oba kraja:

$$l = z \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow v_z = \frac{z}{2 \cdot l} \cdot c, z = 1, 2, 3, \dots$$

- Štap uklješten na jednom kraju, vazdušni stub otvoren na jednom kraju:

$$l = \frac{(2 \cdot z + 1) \cdot \lambda}{4} \Rightarrow v_z = \frac{2 \cdot z + 1}{4 \cdot l} \cdot c, z = 0, 1, 2, \dots$$

- Štap uklješten na sredini

$$l = (2 \cdot z + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow v_z = \frac{2 \cdot z + 1}{2 \cdot l} \cdot c, z = 1, 2, 3, \dots$$

- Promena frekvencije talasa koju detektuje posmatrač prilikom kretanja izvora i/ili posmatrača.

- Posmatrač miruje, izvor se kreće:

– ka posmatraču:

$$\nu' = \frac{c}{c - v_i} \cdot \nu$$

- od posmatrača:

$$\nu' = \frac{c}{c + v_i} \cdot \nu$$

- Izvor miruje, posmatrač se kreće:

– ka izvoru:

$$\nu' = \frac{c + v_p}{c} \cdot \nu$$

- od izvora:

$$\nu' = \frac{c - v_p}{c} \cdot \nu$$

- Izvor i posmatrač se kreću:

– približavaju se:

$$\nu' = \frac{c + v_p}{c - v_i} \cdot \nu$$

- udaljavaju se:

$$\nu' = \frac{c - v_p}{c + v_i} \cdot \nu$$

- **Z1.** Štap od nikla mase $m = 0,7$ kg, prečnika $d = 15$ mm i dužine $l = 0,45$ m učvršćen je na jednom kraju. Pri longitudinalnom oscilovanju registrovana je frekvencija prvog višeg harmonika $\nu_1 = 8000$ Hz. Odrediti Jungov modul elastičnosti nikla.

Rešenje:

$$\left. \begin{aligned}
 c &= \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \\
 \rho &= \frac{m}{V} = \frac{4 \cdot m}{d^2 \cdot \pi \cdot l} \\
 l &= \frac{3 \cdot \lambda_1}{4} = \frac{3 \cdot c}{4 \cdot \nu_1} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot \nu_1 \cdot l}{3}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_y = \frac{4 \cdot c^2 \cdot m}{d^2 \cdot \pi \cdot l} = \frac{64 \cdot \nu_1^2 \cdot l \cdot m}{9 \cdot d^2 \cdot \pi} = 202,81 \text{ GPa}$$

- **Z2.** Bakarni štap dužine $l = 80$ cm je učvršćen na dva mesta i to na rastojanju $l/4$ od levog i $l/4$ od desnog kraja. Jungov modul elastičnosti bakra je $E_y = 128$ Gpa, a njegova gustina $\rho = 8$ kg/dm³. Odrediti broj sopstvenih frekvencija štapa u opsegu od $\nu_a = 20$ kHz do $\nu_b = 50$ kHz.

Rešenje:

$$\frac{l}{4} = \frac{(2 \cdot z + 1)}{4} \cdot \lambda_z \Rightarrow l = (2 \cdot z + 1) \cdot \lambda_z$$

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} = \lambda_z \cdot \nu_z \Rightarrow \nu_z = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \cdot \frac{2 \cdot z + 1}{l}$$

$$\nu_2 = 25 \text{ kHz}, \nu_3 = 35 \text{ kHz}, \nu_4 = 45 \text{ kHz}$$



- **Z3.** Vazdušni stub otvoren na oba kraja daje osnovni ton frekvencije $\nu_0 = 130,5$ Hz. Odrediti:
 - a) kolika će biti frekvencija osnovnog tona ako se vazdušni stub zatvori na jednom kraju,
 - b) kolika je dužina vazdušnog stuba.Brzina zvuka u vazduhu iznosi $c = 340$ m/s.

Rešenje:

a)

$$\nu_0' = \frac{c}{\lambda_0'} = \frac{c}{4 \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2 \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \nu_0 = 65,25 \text{ Hz}$$

b)

$$l = \frac{c}{2 \cdot \nu_0} = 1,3 \text{ m}$$

- **Z4.** Žica dužine $l = 75,6$ cm učvršćena je na oba kraja. Utvrđeno je da su joj dve uzastopne sopstvene učestanosti $\nu_n = 315$ Hz i $\nu_{n+1} = 420$ Hz. Odrediti:
 - a) najnižu sopstvenu učestanost,
 - b) brzinu prostiranja talasa na ovoj žici,
 - c) ako je masa žice $m = 10,4$ g kolika je sila zatezanja žice.

Rešenje:

$$a) \quad c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda_n \cdot \nu_n = \frac{2 \cdot l}{n} \cdot \nu_n \Rightarrow \nu_n = \frac{c \cdot n}{2 \cdot l}$$

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2 \cdot l} = \nu_1 = 105 \text{ Hz}$$

$$b) \quad c = 2 \cdot l \cdot \nu_1 = 158,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) \quad \mu = \frac{m}{l} \Rightarrow F = \frac{c^2 \cdot m}{l} = 346,7 \text{ N}$$

- **Z5.** Žica dužine $l = 50$ cm i podužne mase $\mu = 2$ g/m zategnuta je silom intenziteta $F = 135,2$ N. Odrediti:
 - a) frekvenciju osnovnog harmonika žice,
 - b) koliko puta je potrebno promeniti silu zatezanja da bi se frekvencija osnovnog harmonika žice povećala $9/8$ puta.

Rešenje:

a)

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda_1 \cdot \nu_1 = 2 \cdot l \cdot \nu_1 \Rightarrow \nu_1 = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot \frac{1}{2 \cdot l} = 260 \text{ Hz}$$

b)

$$\frac{\nu_1'}{\nu_1} = \sqrt{\frac{F'}{F}} = \frac{9}{8} \Rightarrow F' = \frac{81}{64} \cdot F = 171,1 \text{ N}$$

- **Z6.** U Kuntovoj cevi se nalazi azot molarne mase $M = 0,028$ kg/mol na temperaturi $t = 50$ °C. Ako je frekvencija zvuka $\nu = 2000$ Hz odrediti na kojoj dužini će se formirati $n = 10$ Kuntovih figura. Gasna konstanta ima vrednost $R = 8,3$ J/mol·K. ($\kappa = 1,4$)

Rešenje:

$$c = \sqrt{\frac{R \cdot T \cdot \kappa}{M}} = 366,12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$l = \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot \lambda}{4} = \frac{(2 \cdot n + 1) \cdot c}{4 \cdot \nu} = 0,96 \text{ m}$$

- **Z7.** Vozilo se kreće prema vertikalnom zidu. Sirena vozila emituje zvuk frekvencije $\nu_0 = 1000$ Hz. Ako posmatrač koji se nalazi u vozilu osim frekvencije ν_0 registruje i zvuk frekvencije $\nu_2 = 1200$ Hz odrediti brzinu vozila. ($c = 330$ m/s)

Rešenje:

$$\nu_1 = \frac{c}{c - v} \cdot \nu_0$$

$$\nu_2 = \frac{c + v}{c} \cdot \nu_1 = \frac{c + v}{c - v} \cdot \nu_0$$

$$v = \frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_2 + \nu_0} \cdot c = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **Z8.** Dve podmornice se kreću jedna prema drugoj brzinama $v_1 = 20$ km/h i $v_2 = 70$ km/h. Sonar na prvoj podmornici emituje signal frekvencije $\nu_1 = 1030$ Hz brzinom $c = 5470$ km/h. Druga podmornica prima ovaj signal. Prva podmornica detektuje signal reflektovan od druge podmornice. Odrediti:
 - koju frekvenciju detektuje prva podmornica,
 - kolika je razlika frekvencija koje detektuju prva i druga podmornica.

Rešenje:

$$a) \nu_2 = \frac{c + v_2}{c - v_1} \cdot \nu_1$$

$$\nu_1' = \frac{c + v_1}{c - v_2} \cdot \nu_2 = \frac{c + v_1}{c - v_2} \cdot \frac{c + v_2}{c - v_1} \cdot \nu_1 = 1064,46 \text{ Hz}$$

$$\nu_2 = 1047 \text{ Hz}$$

b)

$$\nu_1' - \nu_2 = 17,46 \text{ Hz}$$

- **Z9.** Pri prolasku automobila pored nepokretnog posmatrača menja se frekvencija sirene sa automobila. Odrediti koliko procenata od realne učestanosti sirene iznosi promena frekvencije sirene ako se automobil kreće brzinom $v = 60$ km/h. Brzina zvuka u vazduhu je $c = 340$ m/s.

Rešenje:

$$\left. \begin{array}{l} v_{1ka} = \frac{c}{c-v} \cdot v \\ v_{1od} = \frac{c}{c+v} \cdot v \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{v_{1ka} - v_{1od}}{v} = \frac{2 \cdot c \cdot v}{c^2 - v^2} = 9,83\%$$

- **D1.** Kroz vazduh se prostire zvučni talas čija je frekvencija $\nu = 570$ Hz, talasna dužina $\lambda = 0,6$ m i amplituda $\psi_0 = 0,3$ mm. Odrediti:
 - a) brzinu prostiranja zvuka,
 - b) maksimalnu brzinu oscilacija vazduha,
 - c) fazu oscilovanja, elongaciju, brzinu i ubrzanje tačke koja se nalazi na rastojanju $x = 1250$ m od izvora u trenutku $t = 3$ s.

Rešenje:

a)

$$c = \lambda \cdot \nu = 342 \text{ m/s}$$

b)

$$v_{\max} = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \psi_0 = 1,074 \text{ m/s}$$

c)

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot (t - x/c) = -2345,72 \text{ rad}$$

$$\psi = \psi_0 \cdot \sin(\varphi) = -0,26 \text{ mm}$$

$$v = \psi_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdot \cos(\varphi) = -0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = -\psi_0 \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu)^2 \cdot \sin(\varphi) = 3,33 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- **D2.** Kolikom silom je potrebno zategnuti strunu na gitari dužine $l = 60$ cm, čija je podužna masa $\mu = 0,1$ g/cm, da bi ona pri uspostavljanju stojećeg talasa emitovala zvuk osnovnog tona $\nu_0 = 100$ Hz.

Rešenje:

$$F = 144 \text{ N}$$

- **D3.** Tanka metalna žica zategnuta je silom F_1 između dva nepomična oslonca. Ovu žicu treba zameniti drugom od istog materijala ali trostrukog prečnika. Koliko puta treba da se promeni sila zatezanja da ne bi došlo do promene frekvencije.

Rešenje:

$$F_2 = 9 \cdot F_1$$

- **D4.** Osnovni ton neke žice dužine $L = 50$ cm ima frekvenciju $\nu = 240$ Hz. Ako se žica pri istoj vrednosti sile zatezanja skрати za $\Delta L = 20$ cm odrediti kolika će tada biti osnovna frekvencija tona.

Rešenje:

$$\nu' = 400 \text{ Hz}$$

- **D5.** Metalni štap dužine $L = 2$ m učvršćen je u dvema tačkama koje su na rastojanju $L/2$ tako da im je položaj simetričan u odnosu na sredinu štapa. Kolika je frekvencija druge harmonijske oscilacije štapa ($z = 1$)? Jungov modul elastičnosti štapa iznosi $E_y = 210$ GPa, a gustina materijala od koga je načinjen štap je $\rho = 7$ g/cm³.

Rešenje:

$$\nu_1 = 8215,84 \text{ Hz}$$

- **D6.** Otvorena staklena cev delimično je potopljena u tečnost normalno na njenu slobodnu površinu. Najmanja frekvencija na kojoj rezonira vazdušni stub u cevi je $\nu_1 = 3400$ Hz. Za koliko treba skratiti vazdušni stub u cevi da bi rezonirao na najmanjoj frekvenciji $\nu_2 = 5000$ Hz. Brzina prostiranja zvuka kroz vazduh iznosi $c = 340$ m/s.

Rešenje:

$$\Delta l = 8 \text{ mm}$$

- **D7.** Automobil koji se kreće proizvodi zvuk frekvencije $\nu = 1000$ Hz. Brzina prostiranja zvuka u vazduhu iznosi $c = 340$ m/s. Odrediti koliku će frekvenciju registrovati vozač autobusa:
 - a) dok stoji na autobuskoj stanici, ako mu se automobil približava brzinom $\nu_1 = 35$ km/h,
 - b) ako se kreće brzinom $\nu_2 = 20$ m/s, a automobil ga pretiče brzinom $\nu_3 = 50$ m/s.

Rešenje:

a)

$$\nu_1 = 1029,44 \text{ Hz}$$

b)

$$\nu_2 = 1103,45 \text{ Hz}$$

- **D8.** Vozilo koje se kreće prema prepreci proizvodi zvuk frekvencije $\nu = 1000$ Hz, a registruje odbijeni zvuk frekvencije $\nu'' = 1100$ Hz. Kolika je brzina kretanja vozila ν ako je brzina zvuka $c = 340$ m/s? Kolika bi bila registrovana frekvencija ν_2 zvuka ako bi se vozilo udaljavalo od prepreke? Pravac kretanja je u oba slučaja upravan na prepreku.

Rešenje:

$$\nu = 16,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\nu_2 = 909,1 \text{ Hz}$$

- **D9.** Mlazni avion nadleće u niskom letu posmatrača koji čuje pri nailasku aviona zvuk frekvencije $\nu_1 = 15$ kHz, a pri udaljavanju aviona zvuk frekvencije $\nu_2 = 1$ kHz. Izračunati brzinu aviona uzimajući za brzinu zvuka u vazduhu vrednost $c = 330$ m/s.

Rešenje:

$$v = 288,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$