Dinamika rotacije

Osnovni pojmovi

- Moment inercije je kvantitativna mera za inerciju tela pri rotaciji:
  - zavisi od položaja ose rotacije,
  - za materijalnu tačku: $I = m \cdot r^2$
  - za neko telo:

$$I = \int r^2 \cdot \mathrm{d}m$$

- Štajnerova teorema:

$$I_{\mathrm{d}} = I_{\mathrm{C}} + m \cdot d^2$$

- Drugi Njutnov zakon za rotaciono kretanje:

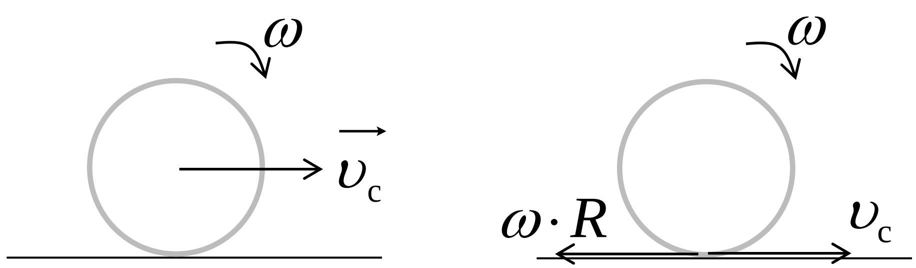
$$I \cdot \vec{\alpha} = \sum \overrightarrow{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

- Kinetička energija rotacionog kretanja:

$$E_{\mathrm{k,rot}} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Osnovni pojmovi (2)

- Telo može da vrši istovremeno rotaciono i translaciono kretanje.
- Kotrljanje bez klizanja:



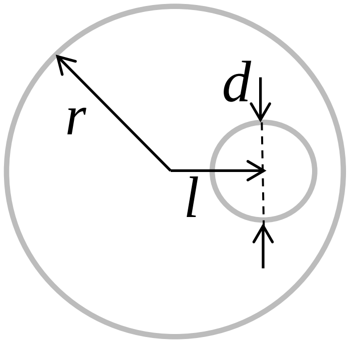
$$\upsilon_\mathrm{c} = \omega \cdot R \qquad (a_\mathrm{c} = \alpha \cdot R)$$

- Pri kotrljanju bez klizanja može da se javi sila statičkog trenja:
  $F_{\mathrm{s,tr}} \leq \mu \cdot N$
- Moment količine kretanja:
  $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{\upsilon} \qquad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
- U odsustvu delovanja spoljnih momenata važi zakon održanja momenta količine kretanja.

Zadaci

- **Z1**. U homogenom disku mase m = 1 kg i poluprečnika r = 30 cm izrezan je okrugli otvor prečnika d = 20 cm čiji se centar nalazi na rastojanju l = 15 cm od ose diska. Odrediti moment inercije sistema u odnosu na osu koja prolazi kroz centar diska normalno na njega. Moment inercije diska je $I = m \cdot r^2 / 2$.

Rešenje:



$$I = I_1 - I_2 = \frac{m \cdot r^2}{2} - \left(m_1 \cdot \frac{d^2}{8} + m_1 \cdot l^2 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \dfrac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h \\ m = \rho \cdot V = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow m_1 = m \cdot \frac{d^2}{4 \cdot r^2}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{m}{2} \cdot \left(r^2 - \frac{d^4}{16 \cdot r^2} - \frac{d^2 \cdot l^2}{2 \cdot r^2} \right) = 4{,}2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

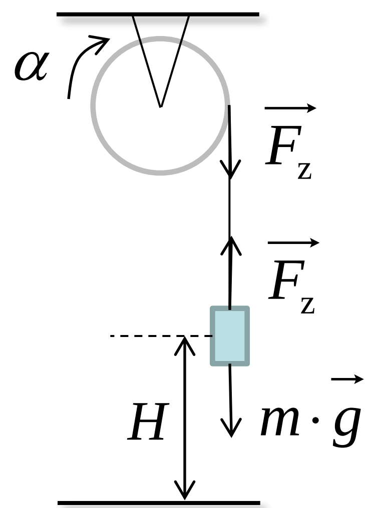
- **Z2**. Oko valjka mase M = 10 kg koji može da rotira oko nepokretne ose, namotano je neistegljivo uže zanemarljivo male mase na čijem kraju visi telo mase $m = M/2$. U početku kretanja telo mase m se nalazi na visini H = 4 m iznad zemlje. Ubrzanje slobodnog padanje je g = 10 m/s^2. Odrediti:

  a) ubrzanje sistema,

  b) brzinu kojom telo pada na zemlju,

  c) ukupnu kinetičku energiju sistema u trenutku pada na zemlju.

Rešenje:



a) $m\cdot a = m\cdot g - F_z$

$$I\cdot\alpha = F_z\cdot R \Rightarrow \frac{M\cdot R^2}{2}\cdot\frac{a}{R} = F_z\cdot R \Rightarrow F_z = \frac{M\cdot a}{2}$$

$$a = \frac{2\cdot m\cdot g}{2\cdot m + M} = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) $\upsilon = \sqrt{2\cdot a\cdot H} = 2\cdot\sqrt{10}\ \mathrm{m/s}$

c) $E_k = m\cdot\upsilon^2/2 + I\cdot\omega^2/2 = 200\ \mathrm{J}$

- **Z3**. Dva tela čije su mase m_1 i m_2, pri čemu je $m_1>m_2$ vezana su koncem zanemarljive mase i prebačena preko kotura mase M i poluprečnika R. Ako konac u žljebu ne proklizava odrediti:

  a) ubrzanje tegova,

  b) sile zatezanja konca.

Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g. Moment inercije kotura je: $I = M \cdot R^2 / 2$

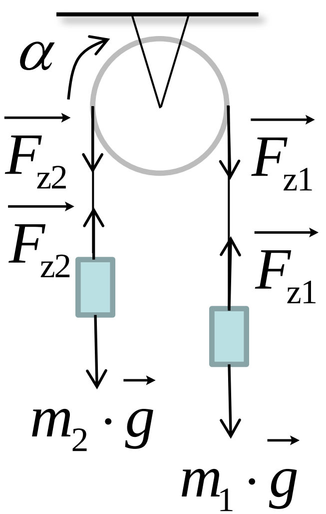
Rešenje:

a) $m_1 \cdot a = m_1 \cdot g - F_{z1}$

$$m_2 \cdot a = F_{z2} - m_2 \cdot g$$

$$I \cdot \alpha = \left(F_{z1} - F_{z2}\right) \cdot R \Rightarrow F_{z1} - F_{z2} = \frac{M \cdot a}{2}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2} \cdot g$$



b)

$$F_{z1} = m_1 \cdot (g - a)$$

$$F_{z2} = m_2 \cdot (g + a)$$

- **Z4**. Homogeni valjak mase m_1 = 8 kg i metalni blok mase m_2 = 4 kg nalaze se na strmoj ravni koja zaklapa ugao θ = 30° sa horizontalom. Blok je vezan za osovinu valjka neistegljivim koncem zanemarljive mase. Koeficijent trenja između bloka i ravni je μ = 0,2. Odrediti ubrzanje sistema ako se valjak kotrlja bez klizanja. Trenje u osovini valjka zanemariti. Ubrzanje slobodnog padanja je g = 9,81 m/s^2.

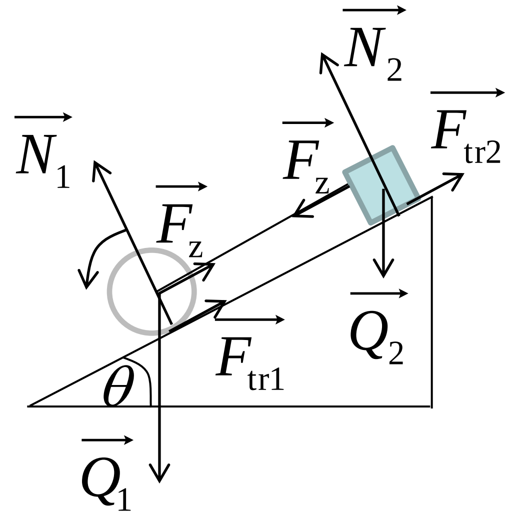
Rešenje:

$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g \cdot \sin\theta - F_{\mathrm{tr1}} - F_{\mathrm{z}}$$

$$m_2 \cdot a = F_{\mathrm{z}} + m_2 \cdot g \cdot \sin\theta - \mu \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$I \cdot \alpha = F_{\mathrm{tr1}} \cdot r \Rightarrow F_{\mathrm{tr1}} = \frac{m_1 \cdot a}{2}$$

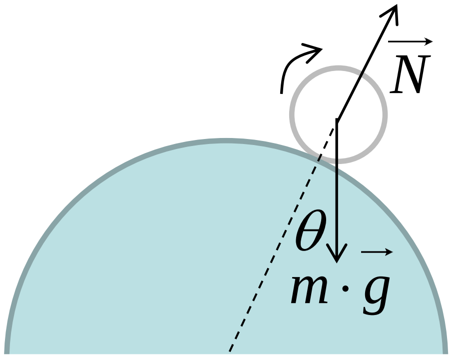
$$a = \frac{m_2 \cdot (\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta) + m_1 \cdot \sin\theta}{3 \cdot m_1 / 2 + m_2} \cdot g = 3{,}25 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



Zadaci

- **Z5**. Homogena kugla mase m i poluprečnika r počne da se kotrlja bez početne brzine i bez klizanja niz polusferu poluprečnika R. Kolika je ugaona brzina kugle u trenutku odvajanja od polusfere. Moment inercije kugle u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase iznosi: $I = 2 \cdot m \cdot r^2 / 5$

Rešenje:



$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{r+R} = m \cdot g \cdot \cos\theta - N$$

$$N = 0 \Rightarrow \upsilon_{\min}{}^2 = g \cdot \cos\theta \cdot (r+R)$$

$$m \cdot g \cdot (R+r) = m \cdot g \cdot (R+r) \cdot \cos\theta + \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

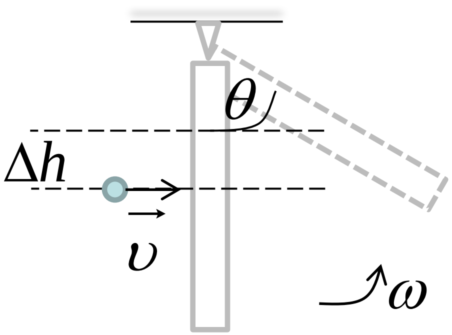
$$\upsilon = \omega \cdot r$$

$$\omega_{\min} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{10}{17} \cdot g \cdot (R+r)}$$

Zadaci

- **Z6**. Homogeni drveni štap mase m = 10 kg i dužine l = 2 m obešen je o osovinu O na jednom svom kraju. Metak mase m_1 = 30 g i brzine υ_1 = 900 m/s pogodi štap u centru mase. Metak prođe kroz štap i na izlasku ima brzinu υ_2 = 100 m/s. Moment inercije štapa je $I = m \cdot l^2 / 12$, a ubrzanje slobodnog padanja g = 9,81 m/s^2. Odrediti za koliki ugao će se pomeriti štap.

Rešenje:



$$I_š = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{3}$$

$$\Delta h = \frac{l}{2} \cdot (1 - \cos\theta)$$

$$m_1 \cdot \upsilon_1 \cdot \frac{l}{2} = m_1 \cdot \upsilon_2 \cdot \frac{l}{2} + I_š \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{3 \cdot m_1 \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2)}{2 \cdot m \cdot l}$$

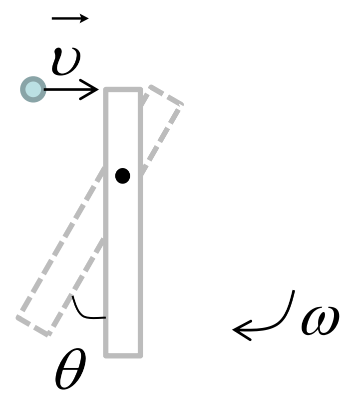
$$m \cdot g \cdot \Delta h = \frac{I_š \cdot \omega^2}{2} \Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{m_1^2 \cdot (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{m^2 \cdot l \cdot g}$$

$$\theta = 38{,}76°$$

- **Z7**. Homogeni štap mase m_1 = 400 g i dužine l = 0,6 m može da rotira oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku koja se nalazi na rastojanju $2l/3$ od donjeg kraja štapa. U vrh štapa udara metak mase m_2 = 10 g brzinom υ = 10 m/s i ostaje u štapu. Za koliki ugao će se pomeriti štap nakon udara metka? Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase iznosi: $I = m \cdot l^2 / 12$.

Rešenje:

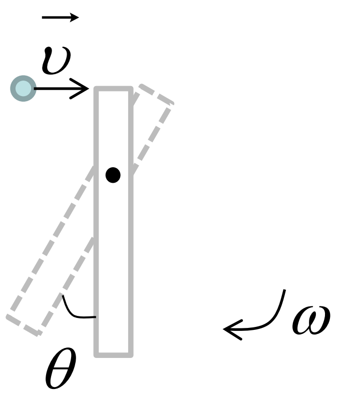
$$\left.\begin{aligned} & m_2 \cdot \upsilon \cdot \frac{l}{3} = I \cdot \omega \\ & I = m_2 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^2 + m_1 \cdot \frac{l^2}{12} + m_1 \cdot \left(\frac{l}{6}\right)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{3 \cdot m_2 \cdot \upsilon}{(m_1 + m_2) \cdot l}$$



$$y_c' = \frac{m_2 \cdot 0 + m_1 \cdot \frac{l}{2}}{(m_1 + m_2)}, s_c' = y_c' - \frac{l}{3} = \frac{m_1 - 2 \cdot m_2}{6 \cdot (m_2 + m_1)} \cdot l$$

$$\frac{I\cdot\omega^2}{2}=\left(m_1+m_2\right)\cdot g\cdot h=\left(m_1+m_2\right)\cdot g\cdot s_c'\cdot\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\theta=\arccos\left(1-\frac{3\cdot {m_2}^2\cdot\upsilon^2}{\left(m_1+m_2\right)\cdot\left(m_1-2\cdot m_2\right)\cdot g\cdot l}\right)=14,7°$$



Zadaci

- **D1**. Metalni disk ima debljinu a = 2 mm i poluprečnik R = 20 cm. Uz ivicu diska napravljen je šupalj kružni izrez poluprečnika r = 10 cm. Koliki je moment inercije takvog diska u odnosu na osu koja je normalna na ravan diska a prolazi kroz njegov centar? Gustina metala od kojeg je disk napravljen iznosi ρ = 7850 kg/m^3.

Rešenje:

$$I = 3{,}2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

Zadaci

- **D2**. Na horizontalni tanak cilindar mase m_1 i prečnika d namotano je uže zanemarljive mase na kome visi telo mase m_2. Kada se sistem prepusti samom sebi odrediti:

  a) ugaono ubrzanje cilindra,

  b) silu zatezanja u užetu.

Rešenje:

a)

$$\alpha = \frac{4 \cdot m_2 \cdot g}{(2 \cdot m_2 + m_1) \cdot d}$$

b)

$$F_z = \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot g}{2 \cdot m_2 + m_1}$$

- **D3**. U žljeb na disku mase m = 54 g postavljen je tanak konac, o čije krajeve su obešeni tegovi masa m_1 = 100 g i m_2 = 200 g. Odrediti:

  a) ubrzanje tegova,

  b) vreme potrebno da telo mase m_2 pređe put dužine h = 1,5 cm, ako su u početnom trenutku tela bila u stanju mirovanja.

  Trenje kotura i konca zanemariti. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2.

Rešenje:

a)

$$a = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b)

$$t_2 = 0{,}1\,\mathrm{s}$$

Zadaci

- **D4**. Homogeni cilindar poluprečnika R = 20 cm rotira oko podužne ose ugaonom brzinom ω_0 = 40 rad/s. Tako rotirajući cilindar se lagano pusti na strmu ravan nagibnog ugla θ = 30° te se pusti da se kotrljanjem bez klizanja penje uz strmu ravan. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 10 m/s^2. Odrediti:

  a) minimalnu vrednost koeficijenta trenja između cilindra i strme ravni,

  b) vreme posle koga će cilindar dostići najviši položaj na njoj.

Rešenje:

a)

$$\mu \geq \frac{1}{3} \cdot tg\theta = 0{,}19$$

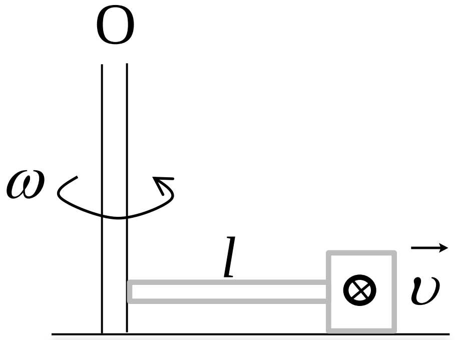
b)

$$t_{\mathrm{p}} = 2{,}4\,\mathrm{s}$$

Zadaci

- **D5**. Drveni blok mase M leži na horizontalnoj ravni i spojen je sa osom O pomoću horizontalne šipke dužine l i zanemarljive mase. U težište bloka, normalno na ravan crteža ispali se u horizontalnom pravcu metak mase m brzinom intenziteta υ. Koeficijent trenja između bloka i podloge je μ. Moment inercije bloka je $I = M \cdot l^2$, a intenzitet ubrzanja slobodnog padanja g. Pretpostaviti da metak ostaje u bloku. Odrediti broj obrta N koji će blok izvršiti pre nego što se zaustavi usled trenja o podlogu.

Rešenje:



$$\omega = \upsilon' / l$$

$$l \cdot m \cdot \upsilon = l \cdot m \cdot \upsilon' + I \cdot \omega \Rightarrow \upsilon' = \frac{m}{m+M} \cdot \upsilon$$

$$\Delta E_\mathrm{k} = A_\mathrm{tr} = -F_\mathrm{tr} \cdot s \Rightarrow E_\mathrm{k} = F_\mathrm{tr} \cdot s$$

$$\frac{m \cdot \upsilon'^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{m+M}{2} \cdot \upsilon'^2 = \mu \cdot (m+M) \cdot g \cdot s$$

$$s = \frac{m^2}{(m+M)^2} \cdot \frac{\upsilon^2}{2 \cdot \mu \cdot g} \Rightarrow N = \frac{s}{2 \cdot \pi \cdot l} = \frac{m^2 \cdot \upsilon^2}{4 \cdot \mu \cdot \pi \cdot g \cdot l \cdot (m+M)^2}$$

Zadaci

- **D6**. Drveni štap mase m = 500 g i dužine l = 1,2 m nalazi se u horizontalnom položaju. Štap može da se obrće oko jednog svog kraja u vertikalnoj ravni. Težište štapa pogodi metak mase m_2 = 10 g krećući se vertikalno naviše. Metak se pri tome zadrži u štapu. Putanja metka je normalna na osu štapa. Kolika mora da bude brzina metka υ da bi štap dospeo u vertikalni položaj? Moment inercije štapa u odnosu na težišnu osu iznosi $I_0 = m \cdot l^2 / 12$. Ubrzanje slobodnog padanja je g = 9,81 m/s^2.

Rešenje:

$$\upsilon = \frac{1}{m_2} \cdot \sqrt{\frac{(4 \cdot m + 3 \cdot m_2)(m_2 + m) \cdot g \cdot l}{3}} = 201,5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zadaci

- **D7**. Homogeni štap mase m_1 = 6 kg i dužine l = 4 m rotira oko horizontalne ose koja prolazi kroz tačku koja se nalazi na rastojanju $l/4$ od gornjeg kraja štapa. U vrh štapa udara metak mase m_2 = 1 kg brzinom υ = 5 m/s i ostaje u štapu. Odrediti:

  a) ugaonu brzinu štapa,

  b) periferijsku brzinu tačke na kraju štapa nakon sudara metka i štapa.

  Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase iznosi: $I_0 = m_1 \cdot l^2 / 12$

Rešenje:

a)

$$\omega = \frac{12 \cdot m_2 \cdot \upsilon}{\left(7 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2\right) \cdot l} = 3{,}33 \cdot 10^{-1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

b)

$$\upsilon_1 = \frac{9 \cdot m_2 \cdot \upsilon}{7 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$