

Gravitacija

- Njutnov zakon gravitacije (kada su tela malih dimenzija u odnosu na međusobno rastojanje između njih) intenzitet gravitacione sile:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- Gravitaciono ubrzanje:

$$g(r) = \gamma \cdot \frac{m}{r^2}$$

- Potencijalna energija (u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti):

$$E_p = -\frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{r_1}$$

- Rad spoljašnje sile pri pomeranju tela mase m_1 u gravitacionom polju tela mase m_2 iz položaja r_1 u položaj r_2 :

$$A = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = E_{p2} - E_{p1}$$

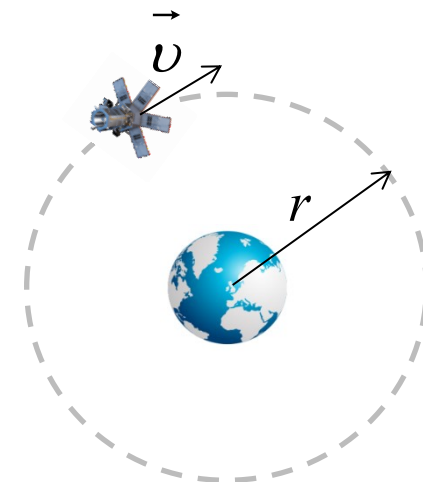
- **Z1.** Veštački Zemljin satelit kreće se po kružnoj putanji. Odrediti:
 - a) odnos kinetičke i potencijalne energije satelita,
 - b) odnos ukupne i potencijalne energije satelita.

Rešenje:

$$a) \frac{m \cdot v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{r^2} \Rightarrow v^2 = \gamma \cdot \frac{M_z}{r}$$

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{m \cdot v^2}{2}}{-\gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{r}} = \frac{v^2 \cdot r}{-2 \cdot \gamma \cdot M_z} = -\frac{1}{2}$$

$$b) \frac{E_{uk}}{E_p} = \frac{E_p + E_k}{E_p} = 1 + \frac{E_k}{E_p} = \frac{1}{2}$$



- **Z2.** Dve planete se okreću oko Sunca po orbitama za koje približno možemo uzeti da su krugovi poluprečnika $R_1 = 150 \cdot 10^6$ km (Zemlja) i $R_2 = 108 \cdot 10^6$ km (Venera). Odrediti:
 - a) odnos njihovih brzina,
 - b) odnos njihovih perioda obilazaka oko Sunca.

Rešenje:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{a) } \frac{M_z \cdot v_z^2}{R_1} &= \gamma \cdot \frac{M_z \cdot M_s}{R_1^2} \Rightarrow v_z^2 = \gamma \cdot \frac{M_s}{R_1} \\
 v_v^2 &= \gamma \cdot \frac{M_s}{R_2}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_z}{v_v} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = 0,85$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{b) } T_z &= \frac{2 \cdot \pi}{\omega_z} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_1}{v_z} \\
 T_v &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_2}{v_v}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_z}{T_v} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{v_v}{v_z} = 1,63$$

- **Z3.** Telo se nalazi na visini $H = 2R_z$ od površine Zemlje. Odrediti vrednost ubrzanja slobodnog padanja na toj visini ukoliko je poznato ubrzanje slobodnog padanja na površini Zemlje g_0 .

Rešenje:

$$m \cdot g_0 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{R_z^2} \Rightarrow g_0 = \gamma \cdot \frac{M_z}{R_z^2}$$

$$m \cdot g_H = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{(R_z + H)^2} \Rightarrow g_H = \gamma \cdot \frac{M_z}{9 \cdot R_z^2} = \frac{g_0}{9}$$

- **Z4.** Zemljin veštački satelit se kreće na visini $H = R_z$. Odrediti period rotacije tog satelita u funkciji poluprečnika Zemlje i ubrzanja slobodnog padanja na površini Zemlje g_0 .

Rešenje:

$$m \cdot g_0 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{R_z^2} \Rightarrow g_0 = \gamma \cdot \frac{M_z}{R_z^2}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R_z + H} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{(R_z + H)^2} \Rightarrow v^2 = \gamma \cdot \frac{M_z}{R_z + H} = \gamma \cdot \frac{M_z}{2 \cdot R_z} = \frac{g_0 \cdot R_z}{2}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_z + H)}{v} = 4 \cdot \pi \cdot R_z \cdot \sqrt{\frac{2}{g_0 \cdot R_z}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R_z}{g_0}}$$

- **Z5.** Ako se zna da je gustina supstancije od koje je načinjena Zemlja ρ , a njen poluprečnik R , odrediti na kojoj visini će se kretati Zemljin satelit čiji je period kretanja T . Gravitaciona konstanta je γ . Putanju satelita smatrati kružnom.

Rešenje:

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R + H)}{v} \Rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R + H)}{T}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R + H} = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{(R + H)^2} \Rightarrow v^2 = \gamma \cdot \frac{M}{R + H}$$

$$H = R \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot \rho \cdot T^2}{3 \cdot \pi}} - 1 \right)$$

- **Z6.** Sa površine Zemlje, u vertikalnom pravcu, izbačeno je telo početnom brzinom v_0 . Ako je poznat poluprečnik Zemlje R_z i ubrzanje slobodnog padanja g_0 na njenoj površini. Odrediti maksimalnu visinu do koje će telo dospeti. Otpor vazduha zanemariti.

Rešenje:

$$m \cdot g_0 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{R_z^2} \Rightarrow g_0 = \gamma \cdot \frac{M_z}{R_z^2}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{p2} \Rightarrow \frac{m \cdot v_0^2}{2} - \gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{R_z} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M_z}{R_z + H}$$

$$H = \frac{R_z \cdot v_0^2}{2 \cdot g_0 \cdot R_z - v_0^2}$$

- **Z7.** Kolika je prosečna gustina materije od koje je sačinjen Mesec ako je njegova masa $p = 81$ puta manja od mase Zemlje, a njegovo gravitaciono ubrzanje na površini $q = 6$ puta manje od Zemljinog. Prosečna gustina Zemlje je $\rho_z = 5,5 \text{ g/cm}^3$. Sva tela smatrati homogenim kuglama.

Rešenje:

$$g_z = \gamma \cdot \frac{M_z}{R_z^2} = \gamma \cdot \frac{\rho_z \cdot V_z}{R_z^2} = \gamma \cdot \frac{\rho_z \cdot 4 \cdot R_z^3 \cdot \pi}{3 \cdot R_z^2} = \gamma \cdot \frac{\rho_z \cdot 4 \cdot R_z \cdot \pi}{3}$$

$$g_M = \gamma \cdot \frac{M_M}{R_M^2} = \gamma \cdot \frac{\rho_M \cdot 4 \cdot R_M \cdot \pi}{3}$$

$$\frac{g_z}{g_M} = \frac{M_z}{M_M} \cdot \frac{R_M^2}{R_z^2} \Rightarrow q = p \cdot \frac{R_M^2}{R_z^2} \Rightarrow \frac{R_z}{R_M} = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$\frac{g_z}{g_M} = \frac{\rho_z \cdot R_z}{\rho_M \cdot R_M} \Rightarrow q = \frac{\rho_z}{\rho_M} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \Rightarrow \rho_M = \frac{1}{q} \cdot \rho_z \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} = 3,37 \text{ g/cm}^3$$

- **D1.** Odrediti:

a) na kojoj visini u funkciji poluprečnika Zemlje R_z je ubrzanje slobodnog padanja jednako $1/16$ vrednosti ubrzanja na površini Zemlje g_0 ,

b) potencijalnu energiju tela mase m na toj visini.

Rešenje:

a)

$$H = 3 \cdot R_z$$

b)

$$E_p = -\frac{m \cdot g_0 \cdot R_z}{4}$$

- **D2.** Odrediti na kojoj visini u odnosu na Zemlju leti veštački satelit čiji je period obilaska Zemlje $T = 3$ h. Poluprečnik Zemlje iznosi $R_z = 6371$ km, a ubrzanje slobodnog padanja na njenoj površini $g_0 = 10$ m/s².

Rešenje:

$$H = 4253 \text{ km}$$

- **D3.** Ako se zna da je srednja gustina supstancije od koje je obrazovana Zemlja $\rho = 5500 \text{ kg/m}^3$, a njen poluprečnik $R = 6400 \text{ km}$, izračunati:
 - a) visinu na kojoj će se kretati veštački Zemljin satelit čiji je period kretanja $T = 4 \text{ h}$,
 - b) ubrzanje slobodnog padanja na toj visini.

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Rešenje:

a)

$$H = 6438 \text{ km}$$

b)

$$g_H = 2,44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- **D4.** Prečnik Merkura je $D = 4840$ km, a rastojanje do centra Sunca iznosi $R = 5,79 \cdot 10^7$ km. Srednja gustina Merkura je $\rho = 5430$ kg/m³, a period njegovog obilaska oko Sunca iznosi $T = 7,6 \cdot 10^6$ s. Gravitaciona konstanta ima vrednost $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m²/kg². Smatrati da se Merkur kreće oko Sunca po kružnoj putanji. Odrediti:
 - a) masu Sunca,
 - b) privlačnu gravitacionu silu između Merkura i Sunca.

Rešenje:

a)

$$M_s = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

b)

$$F_g = 1,28 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

- **D5.** Veštački satelit se kreće oko planete A sa periodom rotacije T_1 .
Odrediti:
 - a) period rotacije ovog satelita kada se kreće oko planete B koja ima četiri puta manju gustinu i dva puta veći poluprečnik?
 - b) odnos potencijalnih energija satelita u ova dva slučaja?Putanju satelita smatrati kružnom i na visini zanemarljivoj u odnosu na poluprečnik planeta.

Rešenje:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 2$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p1}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = 1$$