Dinamika translacionog kretanja

Osnovni zakoni

- Prvi Njutnov zakon:

  $$m \cdot \vec{\upsilon} = \vec{p} = \text{const}$$

  U odsustvu delovanja sile, impuls je konstantan.
- Drugi Njutnov zakon:

  $$\frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{\upsilon})}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

  Promena impulsa proporcionalna je sili i vrši se u pravcu dejstva sile.
- Treći Njutnov zakon:

  $$\vec{F_{\mathrm{a}}} = -\vec{F_{\mathrm{r}}}$$

  Sile kojima dva tela deluju jedno na drugo istog su intenziteta i pravca, a suprotnog smera.
- Sila trenja proporcionalna je normalnoj sili između tela i podloge:

  $$F_{\mathrm{tr}} = \mu \cdot N$$
- Kada se telo kreće kružno, rezultantna sila je centripetalna:

  $$F_{\mathrm{r}} = m \cdot a_{\mathrm{r}} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Rad i energija

- Zakon održanja impulsa u izolovanom sistemu:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{\upsilon_i} = \mathrm{const}$$

- Pri pomeranju tela nekom silom vrši se rad:

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

- Kada je sila konstantna i zaklapa ugao θ sa pređenim putem:

$$A = F \cdot s \cdot \cos\theta$$

- Energija nekog tela se meri radom koji ono može da izvrši. Rad koji se izvrši na telu povećava njegovu energiju: $\Delta E_{\mathrm{k}} = A$
- Mehanička energija može biti kinetička i potencijalna:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon^2 \qquad E_{\mathrm{p,g}} = m \cdot g \cdot h \qquad E_{\mathrm{p,o}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2$$

- Zakon održanja energije u izolovanom sistemu:

$$\sum_{\mathrm{k,p}} E_j = \mathrm{const}$$

- **Z1**. Dva tela različitih masa m i M ($M>m$) prebačena su pomoću neistegljivog kanapa zanemarljivo male mase preko nepomičnog kotura po kome mogu da klize bez trenja. Intenzitet ubrzanja slobodnog padanja je g. Odrediti:

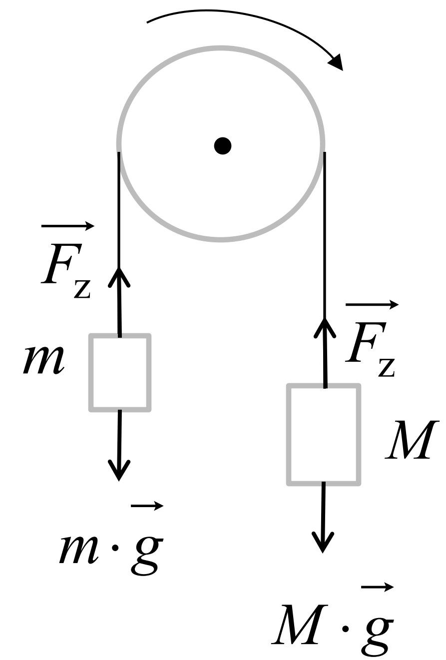
  a) intenzitet ubrzanja sistema,

  b) intenzitet sile zatezanja kanapa.

Rešenje:

a) $$\left.\begin{aligned} M\cdot a &= M\cdot g - F_z \\ m\cdot a &= F_z - m\cdot g \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{M-m}{M+m}\cdot g$$

b) $$F_z = m\cdot(a+g) = \frac{2\cdot m\cdot M}{M+m}\cdot g$$

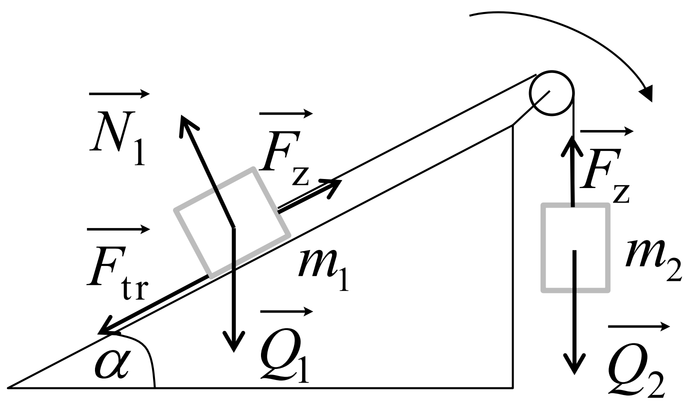


Zadaci

- **Z2**. Na strmoj ravni nagibnog ugla α = 30° nalazi se telo mase m_1 = 0,2 kg. Koeficijent trenja između tela mase m_1 i strme ravni je μ = 0,173. To telo je preko kotura povezano sa telom mase m_2 = 0,8 kg koje visi sa strme ravni. Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 10 m/s². Odrediti:

  a) intenzitet ubrzanja sistema,

  b) intenzitet sile zatezanja u užetu.



Rešenje:

a)
$$m_1 \cdot a = F_z - F_{tr} - m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha$$
$$F_{tr} = \mu \cdot N_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$
$$m_2 \cdot a = m_2 \cdot g - F_z$$
$$a = g \cdot \frac{m_2 - m_1 \cdot (\mu \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} = 6{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b)
$$F_z = m_2 \cdot (g - a) = 2{,}64\,\mathrm{N}$$

- **Z3**. Automobil A se kreće po uzbrdici nagibnog ugla θ = 12°. Na rastojanju d = 24 m ispred njega nalazi se parkiran automobil B. Ako je brzina automobila A iznosila υ_0 = 64,8 km/h u trenutku kada je zakočio i počeo da proklizava, odrediti:

  a) brzinu pri kojoj dolazi do sudara ako koeficijent trenja između automobila i podloge iznosi μ = 0,1,

  b) minimalno rastojanje između automobila da ne dođe do sudara.

  Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2.

Rešenje:

a)

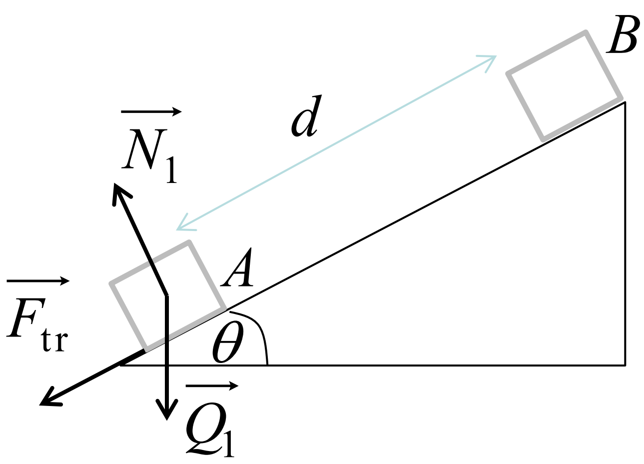
$$m_A \cdot a = m_A \cdot g \cdot \sin\theta + \mu \cdot m_A \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$a = 3\,\mathrm{m/s}^2$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^{\,2} - 2 \cdot a \cdot d} = 13{,}4\,\mathrm{m/s}$$

b)

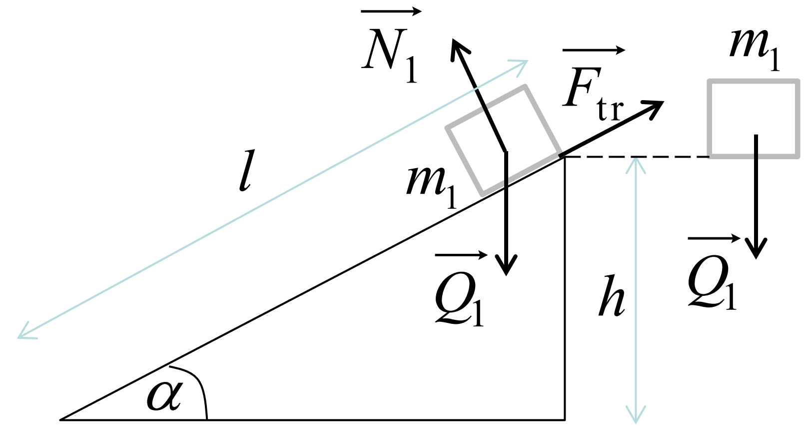
$$d_2 = \frac{\upsilon_0^{\,2}}{2 \cdot a} = 54\,\mathrm{m}$$



Zadaci

- **Z4**. Telo mase m_1 nalazi se na vrhu strme ravni nagibnog ugla α = 45°. Odrediti koeficijent trenja između tela i podloge ako je vreme slobodnog pada sa vrha strme ravni dva puta manje od vremena potrebnog da telo sklizne niz strmu ravan.

Rešenje:



$$m_1 \cdot a = m_1 \cdot g \cdot \sin\alpha - F_{tr}$$

$$F_{tr} = \mu \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}} = 2 \cdot t_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

$$\frac{4 \cdot h}{g} = \frac{l}{a} \Rightarrow \frac{h}{l} = \sin\alpha = \frac{g}{4 \cdot a} \Rightarrow a = \frac{g}{4 \cdot \sin\alpha}$$

$$\mu = \frac{4 \cdot \sin^2\alpha - 1}{4 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 0{,}5$$

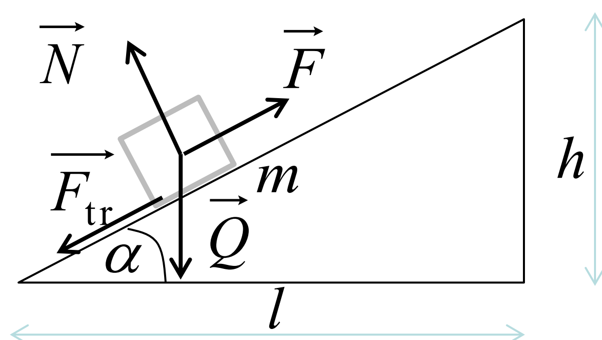
- **Z5**. Telo mase m u početnom trenutku miruje u podnožju brda. Pod dejstvom sile koja u svakoj tački putanje ima pravac tangente na putanju, čovek izvlači telo na vrh brda konstantnom brzinom. Visina brda je h, dužina osnove brda je l, a koeficijent trenja je μ. Odrediti:

  a) rad sile reakcije podloge i rad gravitacione sile,

  b) rad sile trenja na putu od podnožja do vrha,

  c) rad koji izvrši čovek na putu od podnožja do vrha.

Rešenje:



a)

$$A_N = N \cdot s \cdot \cos 90° = 0$$

$$A_Q = Q \cdot s \cdot \cos(\alpha + 90°) = -Q \cdot s \cdot \sin\alpha$$

$$A_Q = -Q \cdot h = -m \cdot g \cdot h$$

b)

$$A_{F_{tr}} = F_{tr} \cdot s \cdot \cos 180° = -F_{tr} \cdot s$$

$$A_{F_{tr}} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot l$$

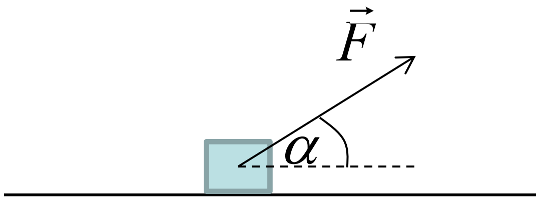
c)

$$F = F_{tr} + Q \cdot \sin\alpha$$

$$A_F = F \cdot s = -A_{F_{tr}} - A_Q$$

- **Z6**. Malo telo mase m koje nepokretno leži na horizontalnoj glatkoj podlozi počinje u trenutku t = 0 da se vuče po podlozi silom $F = k \cdot t$ (k je poznata pozitivna konstanta). Sila sa horizontalom zaklapa ugao α i usmerena je naviše. Naći brzinu tela u trenutku odvajanja od podloge i dotad pređeni put.

Rešenje:



$$m \cdot a = F \cdot \cos\alpha$$

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = k \cdot t \cdot \cos\alpha \Rightarrow \mathrm{d}\upsilon = \frac{k \cdot \cos\alpha}{m} \cdot t \cdot \mathrm{d}t$$

$$\upsilon = \frac{k \cdot \cos\alpha}{2 \cdot m} \cdot t^2 \;\; (\upsilon(0) = 0)$$

u trenutku odvajanja:

$$F \cdot \sin\alpha = m \cdot g \Rightarrow t_1 = \frac{m \cdot g}{k \cdot \sin\alpha} \qquad \upsilon_1 = \frac{m \cdot g^2}{2 \cdot k} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$s = \int \upsilon \cdot \mathrm{d}t = \frac{k \cdot \cos\alpha}{6 \cdot m} \cdot t^3 \Rightarrow s_1 = \frac{m^2 \cdot g^3}{6 \cdot k^2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}$$

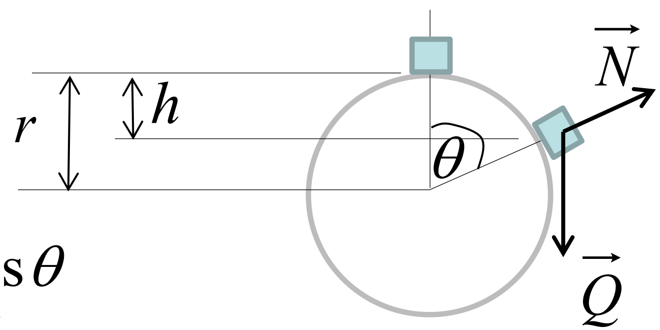
- **Z7**. Telo malih dimenzija sklizne bez početne brzine sa vrha lopte poluprečnika r = 0,3 m. Trenje se zanemaruje. Odrediti:

  a) za koliko je telo smanjilo svoju nadmorsku visinu u odnosu na prvobitni položaj u tački u kojoj se odvaja od površine lopte i nastavlja kretanje kroz vazduh,

  b) koji ugao opisuje radijus vektor tela u toku njegovog kretanja po lopti.

Rešenje:

a) $$\cos\theta = \frac{r-h}{r}$$



$$m\cdot\frac{\upsilon^2}{r} = m\cdot g\cdot\cos\theta - N$$

u trenutku odvajanja: $N = 0 \Rightarrow \upsilon^2 = g\cdot r\cdot\cos\theta$

$$m\cdot\frac{\upsilon^2}{2} + m\cdot g\cdot(2\cdot r - h) = m\cdot g\cdot 2\cdot r \Rightarrow m\cdot\frac{\upsilon^2}{2} = m\cdot g\cdot h$$

$$r - h = 2\cdot h \Rightarrow h = r/3 = 0{,}1\,\mathrm{m}$$

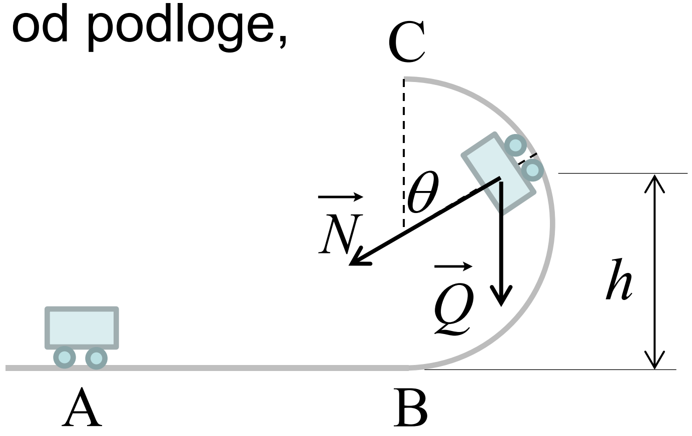
b) $$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}19^\circ$$

- **Z8**. Iz tačke A gurne se vagon po šinama položenim po putanji ABC, koja u tački B prelazi u polukrug poluprečnika r. Odrediti:

  a) minimalni intenzitet početne brzine υ_0 koju treba saopštiti vagonu u tački B da bi prešao put ABC ne odvajajući se od podloge,

  b) intenzitet brzine vagona u tački C.

  Zanemariti gubitke zbog sile trenja.



Rešenje:

a)
$$m \cdot \frac{\upsilon^2}{r} = m \cdot g \cdot \cos\theta + N$$
$$N \geq 0 \Rightarrow \upsilon^2 \geq g \cdot r \cdot \cos\theta = g \cdot (h - r)$$
$$m \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2} = m \cdot \frac{\upsilon^2}{2} + m \cdot g \cdot h \Rightarrow \upsilon_{0,\min}{}^2 = g \cdot (h - r) + 2 \cdot g \cdot h = 5 \cdot g \cdot r$$
$$\upsilon_{0,\min} = \sqrt{5 \cdot g \cdot r}$$

b)
$$\frac{m \cdot \upsilon_C{}^2}{2} + m \cdot g \cdot 2 \cdot r = \frac{m \cdot \upsilon_{0,\min}{}^2}{2} \Rightarrow \upsilon_C = \sqrt{g \cdot r}$$

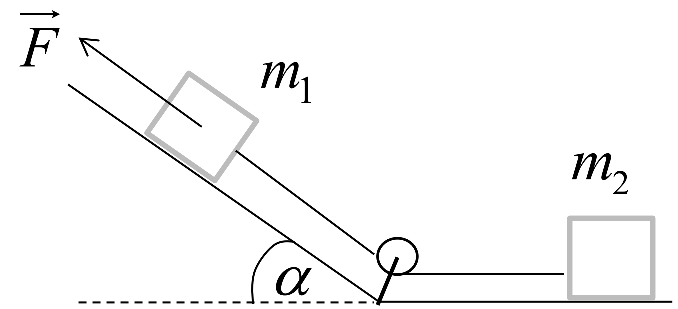
Zadaci

- **D1**. Telo mase m_1 = 1kg se nalazi na strmoj ravni nagibnog ugla α = 30° i povezano je neistegljivim koncem zanemarljive mase preko lakog kotura sa telom mase m_2 = 3 kg koje leži na horizontalnoj površini ispod strme ravni. Koeficijent trenja između svakog od tela i podloge je μ = 0,15. Ako se telo mase m_1 vuče uz strmu ravan silom F = 12 N, odrediti:

  a) ubrzanje sistema,

  b) silu zatezanja u koncu.

  Ubrzanje slobodnog padanja je g = 10 m/s^2.



Rešenje:

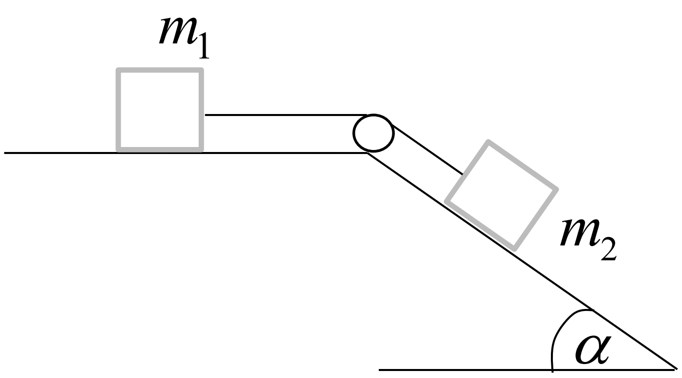
a) $a = 0,3\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

b) $F_z = 5,4\,\mathrm{N}$

- **D2**. Telo mase m_1 koje se nalazi na horizontalnoj ravnoj površini vezano je neistegljivim užetom za telo mase m_2 koje leži na strmoj ravni nagibnog ugla α. Koeficijent trenja između tela i podloge je μ. Ubrzanje slobodnog padanja je g. Odrediti:

  a) intenzitet ubrzanja sistema,

  b) intenzitet sile zatezanja u užetu.



Rešenje:

a)

$$a = g \cdot \frac{m_2 \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2}$$

b)

$$F_z = m_1 \cdot g \cdot \frac{m_2 \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) - \mu \cdot m_1}{m_1 + m_2} + \mu \cdot m_1 \cdot g$$

- **D3**. Dva tela mase m_1 = 3 kg i m_2, vezana su neistegljivim koncem preko kotura. Mase kotura i konca, kao i trenje u koturu se mogu zanemariti. Tela se nalaze na suprotnim stranama nepokretne prizme koje zaklapaju ugao α_1 = 30° i α_2 = 40° sa horizontalom. Koeficijenti trenja između tela i prizme su μ_1 = 0,15 i μ_2 = 0,1. Odrediti za koje vrednosti mase tela m_2 će se sistem kretati nalevo.

  Ubrzanje slobodnog padanja je g = 10 m/s^2.

Rešenje:

$$m_2 \leq 1{,}54\,\mathrm{kg}$$

- **D4**. Prvo telo nalazi se na strmoj ravni nagibnog ugla α = 30°. Koeficijent trenja između tog tela i podloge je $\mu = 2/\sqrt{3}$. To telo je preko kotura zanemarljive mase povezano sa drugim telom koje slobodno visi. Ako je masa prvog tela M, a drugog m, odrediti pri kom odnosu njihovih masa će se prvo telo podizati uz strmu ravan.

Rešenje:

$$\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}$$

- **D5**. Telo mase m = 5 kg počinje da se kreće po horizontalnoj podlozi pod dejstvom stalne sile F =10 N koja deluje paralelno podlozi. U trenutku t = 10 s od početka kretanja, prestaje delovanje ove sile. Odrediti put koji je prešlo ovo telo od početka kretanja do zaustavljanja. Koeficijent trenja između tela i podloge je μ = 0,1, a ubrzanje slobodnog padanja g = 10 m/s^2.

Rešenje:

$$s = 100\,\mathrm{m}$$

Zadaci

- **D6**. Telo mase m, vezano kanapom, rotira oko jedne tačke po krugu koji leži u vertikalnoj ravni u polju Zemljine teže. Za koliko se razlikuju sile zatezanja u kanapu kada se telo nalazi u najnižoj i najvišoj tački putanje. Trenje i istezanje kanapa zanemariti.

Rešenje:

$$\Delta F_{\mathrm{z}} = 6 \cdot m \cdot g$$

- **D7**. Automobil bi trebalo da se popne, bez upotrebe motora, drumom nagiba α = 15° za dužinu s = 52 m. Ukupni koeficijent trenja točkova automobila po drumu je μ = 0,2. Koliku brzinu υ treba da ima automobil na početku uspona? Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2.

Rešenje:

$$\upsilon = 21,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

- **D8**. Drveni blok je pokrenut iz podnožja uz strmu ravan nekom početnom brzinom. Blok se zaustavi posle vremena t_1 i potom klizi naniže i dopre do podnožja strme ravni za vreme t_2. Ako je količnik vremena penjanja i spuštanja $t_1/t_2 = \mu = 1/4$, gde je μ koeficijent trenja između bloka i strme ravni, izračunati nagibni ugao strme ravni prema horizontali.

Rešenje:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mu \cdot \left(\mu^2 + 1\right)}{1 - \mu^2}$$

$$\alpha = 15{,}82^\circ$$

- **D9**. Posmatra se kretanje bloka na strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 30°$.
  a) ako je poznato da se blok kreće niz strmu ravan ravnomernom brzinom, koliki je koeficijent trenja?
  b) ako se blok kreće uz strmu ravan i poznata je njegova početna brzina $\upsilon_0 = 3 \text{ m/s}$, koliki će biti pređeni put do zaustavljanja?
  c) kolika je relativna promena mehaničke energije u slučaju pod b) na kraju njegovog kretanja?

  Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 10 m/s^2.

Rešenje:

a)

$$\mu = \mathrm{tg}\alpha = 0,58$$

b)

$$s = \frac{\upsilon_0{}^2}{2 \cdot g} = 0,45\,\mathrm{m}$$

c)

$$\delta E = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = -50\%$$

Zadaci

- **D10**. Lokomotiva mase m počinje da se kreće po pravoj pruzi u jednom smeru tako da se intenzitet brzine menja po zakonu $\upsilon = k \cdot \sqrt{s}$ (k je poznata konstanta, a s pređeni put). Naći ukupan rad svih sila koje deluju na lokomotivu za prvih T sekundi kretanja.

Rešenje:

$$A = \Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{m \cdot k^4 \cdot T^2}{8}$$

- **D11**. Telo mase m = 1 kg počinje da se kreće iz stanja mirovanja uz strmu ravan nagibnog ugla α = 30° i dužine l = 10 m pod dejstvom stalne sile F = 12 N koja deluje u pravcu kretanja. Nakon što telo dođe do vrha, prestaje delovanje ove sile. Odrediti:
  a) ubrzanje tela tokom njegovog kretanja na strmoj ravni,
  b) maksimalnu kinetičku i potencijalnu energiju tela tokom njegovog kretanja,
  c) ukupne gubitke energije izazvane delovanjem sile trenja.

  Koeficijent trenja između tela i podloge je $\mu = 0{,}1$, a ubrzanje slobodnog padanja $g\ = 10\ \mathrm{m/s^2}$. Smatrati da delo nastavlja kretanje nakon što dođe do vrha strme ravni.

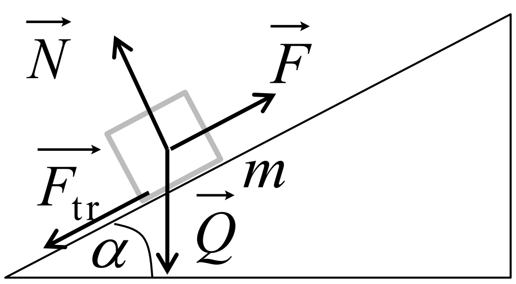
Rešenje:

a)

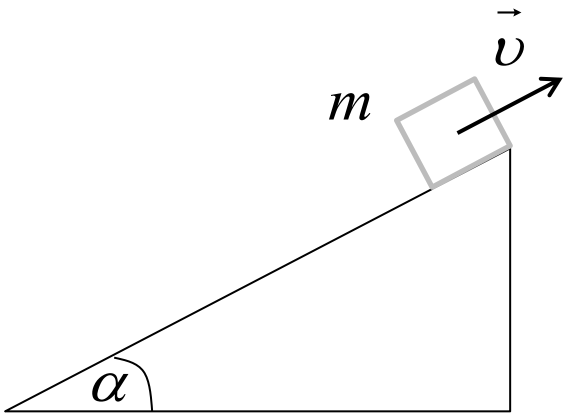
$$m \cdot a = F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$a = \frac{F}{m} - g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$a = 6{,}13\,\mathrm{m/s^2}$$



b)



$$\upsilon = \sqrt{2 \cdot a \cdot l} = 11,07\,\mathrm{m/s}$$

$$E_\mathrm{k} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2} = 61,34\,\mathrm{J}$$

$$E_\mathrm{p} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\alpha = 50\,\mathrm{J}$$

$$\upsilon_h = \upsilon \cdot \cos\alpha = 9,57\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad E_\mathrm{k\,min} = \frac{m \cdot \upsilon_\mathrm{h}^{\;2}}{2} = 45,95\,\mathrm{J}$$

$$E_\mathrm{k\,max} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 111,34\,\mathrm{J}$$

$$E_\mathrm{p\,max} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} - E_\mathrm{k\,min} = 65,38\,\mathrm{J}$$

c)

$$A_{F_\mathrm{tr}} = -F_\mathrm{tr} \cdot l = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot l = -8,66\,\mathrm{J}$$