Kinematika (2)

Kosi hitac

- Kretanje je u vertikalnoj i horizontalnoj ravni. Ako je ugao početne brzine υ_0 sa horizontalnom osom α, tada:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$$

- Jednačina putanje:

$$x = \upsilon_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$

$$y = \upsilon_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$y = x \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \upsilon_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

- Domet ($y = 0$):

$$x_D = D = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g}$$

Rotaciono kretanje

- Ako je θ ugaoni pomeraj tada je trenutna ugaona brzina:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \theta = \int \omega \cdot \mathrm{d}t$$

- Trenutno ugaono ubrzanje:

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \omega = \int \alpha \cdot \mathrm{d}t$$

- Ravnomerno kružno kretanje:

$$\alpha = 0, \omega = \mathrm{const}, \theta = \omega \cdot t$$

- Ravnomerno ubrzano kružno kretanje:

$$\alpha = \mathrm{const}, \omega = \omega_0 + \alpha \cdot \mathrm{t}, \theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

Rotaciono kretanje (2)

- Tangencijalna brzina, kada je R poluprečnik kružnice:

$$\upsilon_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R \cdot \omega$$

- Radijalno ubrzanje:

$$a_{\mathrm{r}} = \omega \cdot \upsilon = \omega^2 \cdot R = \frac{\upsilon^2}{R}$$

- Tangencijalno ubrzanje:

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot R$$

- Ukupno ubrzanje:

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^{\,2} + a_{\mathrm{r}}^{\,2}}$$

- **Z1**. Sa površine Zemlje lansira se projektil pod uglom α = 30° prema horizontu. Domet projektila je D = 2000 m, a ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2. Odrediti:

  a) početnu brzinu projektila,

  b) jednačinu putanje i maksimalnu visinu koju projektil dostiže,

  c) poluprečnik krivine putanje u njenoj najnižoj i najvišoj tački.

  Rešenje:

  a)

$$D = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g} \Rightarrow \upsilon_0 = 150{,}52\,\text{m/s}$$

  b)

$$y = x \cdot \text{tg}\,\alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \upsilon_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t_{\max} = 0 \Rightarrow t_{\max} = \upsilon_0 \cdot \sin \alpha / g$$

$$h_{\max} = \upsilon_0 \cdot \sin \alpha \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\max}^2 = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} = 288{,}69\,\text{m}$$

Zadaci

c) u najvišoj tački

$$a_{\mathrm{r}} = g = \frac{\upsilon_x{}^2}{R_{\min}} = \frac{\upsilon_0{}^2 \cdot \cos^2 \alpha}{R_{\min}} \Rightarrow R_{\min} = \frac{\upsilon_0{}^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} = 1732{,}13\,\mathrm{m}$$

u najnižoj tački:

$$a_{\mathrm{r}} = g \cdot \cos \alpha = \frac{\upsilon_0{}^2}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} = \frac{\upsilon_0{}^2}{g \cdot \cos \alpha} = 2666{,}8\,\mathrm{m}$$

- **Z2**. Pod kojim uglom je potrebno baciti telo da bi:

  a) najveća visina koju dostiže pri kretanju bila jednaka dometu,

  b) domet bio jednak visini koju telo dostiže pri izbacivanju vertikalno uvis istom početnom brzinom.

  Rešenje:

  a)

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} = D = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\, 4 = 75{,}96^\circ$$

  b)

$$h_{\max,\, v} = \frac{\upsilon_0^2}{2 \cdot g} = D = \frac{\upsilon_0^2 \cdot \sin 2 \cdot \alpha}{g} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} = 15^\circ$$

Zadaci

- **Z3**. Točak se obrće oko nepokretne ose tako da njegov ugaoni pomeraj zavisi od vremena po zakonu: $\theta(t) = k \cdot t^2$, gde je k konstanta. Odrediti intenzitet ukupnog ubrzanja tačke na obodu točka posle vremena τ od početka kretanja kada je tangencijalna brzina te tačke υ.

  Rešenje:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot k \cdot t$$

$$\upsilon = \omega(t = \tau) \cdot R = 2 \cdot k \cdot \tau \cdot R \Rightarrow R = \upsilon / (2 \cdot k \cdot \tau)$$

$$a_{\mathrm{r}} = \frac{\upsilon^2}{R} = \upsilon \cdot 2 \cdot k \cdot \tau$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot k$$

$$a_{\mathrm{t}} = \alpha \cdot R = \frac{\alpha \cdot \upsilon}{2 \cdot k \cdot \tau} = \frac{\upsilon}{\tau}$$

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{r}}^2} = \frac{\upsilon}{\tau} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot k^2 \cdot \tau^4}$$

- **Z4**. Kruto telo počinje da rotira oko nepokretne ose ugaonim ubrzanjem $\alpha = k \cdot t$ (k = 0,02 rad/s^3). Posle koliko vremena od početka rotacije vektor ukupnog ubrzanja proizvoljne tačke tela zaklapa ugao φ = 60° sa njenom brzinom.

Rešenje:

$$\omega = \int \alpha \cdot \mathrm{d}t = \int k \cdot t \cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2 + C, \omega(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\upsilon = \omega \cdot R = \frac{k \cdot t^2 \cdot R}{2}$$

$$a_\mathrm{t} = \alpha \cdot R = k \cdot t \cdot R, a_\mathrm{r} = \omega^2 \cdot R = \frac{k^2 \cdot t^4 \cdot R}{4}$$

$$\frac{a_\mathrm{r}}{a_\mathrm{t}} = \mathrm{tg}\varphi = \sqrt{3} = \frac{k \cdot t_1^{\,3}}{4} \Rightarrow t_1 = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{k}} = 7\,\mathrm{s}$$

Zadaci

- **D1**. Sa horizontalnog tla izbaci se telo kao kos hitac. Maksimalna visina do koje se telo popne na svojoj putanji je y_{m} = 3 m. Poluprečnik krivine u najvišoj tački putanje je R = 6 m. Koliki je domet kosog hica? Ubrzanje slobodnog padanja iznosi g = 9,81 m/s^2.

  Rešenje:

  $$D = 12\,\mathrm{m}$$

Zadaci

- **D2**. Odrediti:

  a) početnu brzinu projektila koji se ispaljuje sa površine Zemlje pod uglom od 45° tako da pogodi cilj koji se nalazi na rastojanju $D = 90$ m,

  b) maksimalnu visinu koju projektil tada dostigne,

  c) vreme leta projektila do najviše tačke putanje,

  d) maksimalnu visinu projektila, ako se ispali sa visine H = 10 m od površine Zemlje.

  Ubrzanje slobodnog padanja iznosi $g = 10$ m/s^2.

  Rešenje:

  a) $\upsilon_0 = 30\,\mathrm{m/s}$

  b) $h_{\max} = 22{,}5\,\mathrm{m}$

  c) $t_{\max} = 2{,}1\,\mathrm{s}$

  d) $h'_{\max} = 32{,}5\,\mathrm{m}$

- **D3**. Sa ravne površine dva čoveka istovremeno šutnu po jednu identičnu loptu pod istim elevacionim uglom saopštavajući im različite brzine. Ako je vreme leta do pada jedne lopte dva puta duže od vremena leta do pada druge lopte odrediti:

  a) odnos maksimalnih visina koje dosegnu lopte,

  b) odnos dometa lopti.

  Rešenje:

  a) 4 b) 4

- **D4**. Telo se kreće po kružnici poluprečnika R = 1 m, brzinom $\upsilon = k \cdot t$, gde je k = 2 m/s². Odrediti:

  a) intenzitet normalnog, tangencijalnog i ukupnog ubrzanja u zavisnosti od vremena,

  b) pređeni put u intervalu t_1 = 0 do t_2 = 1 s,

  c) srednju vrednost intenziteta vektora brzine u intervalu t_1 do t_3 = 2 s.

  Rešenje:

  a)
  $$a_{\mathrm{r}} = \frac{k^2 \cdot t^2}{R}, a_{\mathrm{t}} = k, a = k \cdot \sqrt{1 + \frac{k^2 \cdot t^4}{R^2}}$$

  b)
  $$s = 1\,\mathrm{m}$$

  c)
  $$\upsilon_{\mathrm{sr}} = 2\,\mathrm{m/s}$$

- **D5**. Materijalna tačka vrši rotaciono kretanje po kružnici poluprečnika $R = 0{,}1$ m, pri čemu je zavisnost pređenog ugla od vremena data jednačinom:

  $$\theta(t) = A + B \cdot t + C \cdot t^3$$

  gde je $B = 2$ rad/s i $C = 1$ rad/s^3. U trenutku $\tau = 0{,}2$ s odrediti:

  a) ugaonu brzinu,

  b) ugaono ubrzanje,

  c) ugao između vektora brzine i ubrzanja,

  d) pređeni put.

  Rešenje:

  a) $\omega(\tau) = 2{,}1\,\mathrm{rad/s}$

  b) $\alpha(\tau) = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$

  c) $\varphi = 74{,}8°$

  d) $s(\tau) = 40{,}8\,\mathrm{mm}$

- **D6**. Točak poluprečnika $R = 10$ cm vrši rotaciono kretanje, tako da je zavisnost translatorne brzine tačaka koje leže na obodu točka u funkciji vremena proteklog od početka kretanja dato relacijom:

$$\upsilon(t) = A \cdot t + B \cdot t^2$$

gde je $A = 3$ cm/s^2 i $B = 1$ cm/s^3. Odrediti ugao koji zaklapa vektor ukupnog ubrzanja sa poluprečnikom točka $\tau = 3$ s od početka kretanja.

Rešenje:

$$\theta = 15{,}52°$$

- **D7**. Telo se kreće po putu poluprečnika krivine $R = 100/\sqrt{3}\,\mathrm{m}$. Tangencijalno ubrzanje tela iznosi 3 m/s². U trenutku kada brzina tela iznosi 36 km/h odrediti:

  a) radijalno ubrzanje tela,

  b) ukupno ubrzanje tela,

  c) ugao koji zaklapaju vektor brzine i vektor ukupnog ubrzanja.

  Rešenje:

  a)
  $$\upsilon = 10\,\mathrm{m/s},\ a_\mathrm{r} = \frac{\upsilon^2}{R} = \sqrt{3}\,\mathrm{m/s}^2$$

  b)
  $$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{r}^2} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}^2$$

  c)
  $$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a_\mathrm{r}}{a_\mathrm{t}} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

- **D8**. Parametarske jednačine kretanja materijalne tačke u ravni su:

$$x = R\cdot\left(\omega\cdot t - \sin\left(\omega\cdot t\right)\right),\ y = R\cdot\left(1-\cos\left(\omega\cdot t\right)\right)$$

Odrediti poluprečnik krivine trajektorije u trenutku $t_1 = \pi/\left(2\cdot\omega\right)$.

Rešenje:

$$R_{\text{traj}} = 2\sqrt{2}\cdot R$$