

Kinematika

- Trenutna brzina:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Kretanja mogu da budu ravnomerna ili neravnomerna.

- Srednja brzina:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- Trenutno ubrzanje:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Kretanja mogu biti ravnomerno ubrzana ili neravnomerno.

- Kod pravolinijskog kretanja, vektori brzine, ubrzanja i pomeraja su kolinearni (istog pravca):

$$v = \frac{dr}{dt} \Rightarrow r = \int v \cdot dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int a \cdot dt$$

- Kod ravnomernog kretanja:

$$a = 0, v = \text{const}, r = v \cdot t$$

- Kod ravnomerno ubrzanog/usporenog kretanja:

$$a = \text{const}, v = v_0 + a \cdot t, r = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

- Slobodan pad je ravnomerno ubrzano kretanje sa ubrzanjem g
- Vertikalni hitac naviše je ravnomerno ubrzano kretanje sa ubrzanjem $-g$

- **Z1.** Jednačina kretanja tela po x osi ima oblik:

$$x(t) = A + B \cdot t^2 + C \cdot t^3$$

gde je $A = -2$ m, $B = 6$ m/s², $C = -4$ m/s³. Odrediti:

- Brzinu i ubrzanje tela.
- Vreme kretanja tela do zaustavljanja t_z .
- Maksimalnu brzinu tela i vreme koje je potrebno da dostigne tu brzinu.
- Pređeni put tela do zaustavljanja i do vremena $2t_z$.

$$\text{a) } v_x = \frac{dx}{dt} = 2 \cdot B \cdot t + 3 \cdot C \cdot t^2$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \cdot B + 6 \cdot C \cdot t$$

$$\text{b) } v_x(t_z) = 0 = 2 \cdot B \cdot t_z + 3 \cdot C \cdot t_z^2 \Rightarrow t_z = \frac{-2 \cdot B}{3 \cdot C} = 1 \text{ s}$$

$$\text{c) } a_x(t_{\max}) = 0 = 2 \cdot B + 6 \cdot C \cdot t_{\max} \Rightarrow t_{\max} = \frac{-2 \cdot B}{6 \cdot C} = 0,5 \text{ s}$$

$$v_{\max} = v_x(t_{\max}) = 3 \text{ m/s}$$

$$\text{d) } s(t_z) = \int_0^{t_z} |v_x(t)| dt = \int_0^{t_z} v_x(t) dt = x(t_z) - x(0) = 2 \text{ m}$$

$$s(2t_z) = \int_0^{2t_z} |v_x(t)| dt = \int_0^{t_z} v_x(t) dt - \int_{t_z}^{2t_z} v_x(t) dt$$

$$s(2t_z) = (x(t_z) - x(0)) - (x(2t_z) - x(t_z)) = 12 \text{ m}$$

- **Z2.** Vektor položaja materijalne tačke u odnosu na koordinatni početak menja se po zakonu:

$$\vec{r}(t) = A \cdot t \cdot \vec{e}_x - B \cdot t^2 \cdot \vec{e}_y, A, B > 0$$

Odrediti:

- Jednačinu trajektorije.
- Vremensku zavisnost vektora brzine i vektora ubrzanja.
- Vremensku zavisnost ugla između vektora brzine i ubrzanja.

$$\text{a) } x = A \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{A}$$

$$y = -B \cdot t^2 = -\frac{B}{A^2} \cdot x^2$$

$$\text{b) } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = A \cdot \vec{e}_x - 2 \cdot B \cdot t \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2 \cdot B \cdot \vec{e}_y$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{a \cdot v} = \frac{4 \cdot B^2 \cdot t}{2 \cdot B \cdot \sqrt{A^2 + 4 \cdot B^2 \cdot t^2}} = \frac{2 \cdot B \cdot t}{\sqrt{A^2 + 4 \cdot B^2 \cdot t^2}}$$

- **Z3.** Vektor brzine materijalne tačke menja se po zakonu:

$$\vec{v}(t) = A \cdot t \cdot \vec{e}_x + B \cdot \vec{e}_y, A, B > 0$$

Poznato je: $A = 2 \text{ m/s}^2$, $B = 6 \text{ m/s}$. Odrediti:

- a) vremensku zavisnost vektora položaja, ako je $r(0) = 0 \text{ m}$,
- b) jednačinu trajektorije,
- c) vremensku zavisnost vektora ubrzanja,
- d) nakon koliko vremena će ugao između vektora brzine i ubrzanja biti jednak 60° .

Rešenje:

a)

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) \cdot dt = \left(\frac{1}{2} A \cdot t^2 + C_1 \right) \cdot \vec{e}_x + (B \cdot t + C_2) \cdot \vec{e}_y$$

$$r(0) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{1}{2} A \cdot t^2 \cdot \vec{e}_x + B \cdot t \cdot \vec{e}_y$$

$$\text{b) } \vec{r}(t) = \frac{1}{2} A \cdot t^2 \cdot \vec{e}_x + B \cdot t \cdot \vec{e}_y$$

$$x(t) = \frac{1}{2} A \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot x}{A}}$$

$$y(t) = B \cdot t \Rightarrow y = B \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot x}{A}}$$

$$\text{c) } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = A \cdot \vec{e}_x$$

$$\text{d) } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{a \cdot v} = \frac{A^2 \cdot t_1}{A \cdot \sqrt{A^2 \cdot t_1^2 + B^2}} = \frac{A \cdot t_1}{\sqrt{A^2 \cdot t_1^2 + B^2}} = \frac{1}{2}$$

$$4 \cdot A^2 \cdot t_1^2 = A^2 \cdot t_1^2 + B^2 \Rightarrow 3 \cdot A^2 \cdot t_1^2 = B^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{B^2 / 3 \cdot A^2} = 1,73 \text{ s}$$

- **Z4.** Parametarske jednačine kretanja materijalne tačke su:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t), y(t) = \frac{B}{\omega} \cdot (1 - \cos(\omega \cdot t)), A, B, \omega > 0$$

Odrediti:

- a) jednačinu trajektorije,
- b) vektor brzine i ubrzanja,
- c) srednju vrednost intenziteta brzine u intervalu $[0, \pi/\omega]$,
- d) intenzitet vektora srednje brzine u intervalu $[0, \pi/\omega]$.

Rešenje:

a)

$$y = \frac{B}{\omega} \cdot \left(1 - \frac{x}{A}\right)$$

b)

$$\vec{v}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + B \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{a}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_x + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y$$

$$c) \quad v(t) = \sqrt{A^2 \cdot \omega^2 + B^2} \cdot |\sin(\omega \cdot t)|$$

$$v_{sr} = \frac{1}{\pi/\omega} \cdot \int_0^{\pi/\omega} v(t) \cdot dt = \frac{\omega}{\pi} \cdot \sqrt{A^2 \cdot \omega^2 + B^2} \cdot \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega \cdot t) \cdot dt$$

$$v_{sr} = \frac{\omega}{\pi} \cdot \sqrt{A^2 \cdot \omega^2 + B^2} \cdot \left(\frac{-1}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Big|_0^{\pi/\omega} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{A^2 \cdot \omega^2 + B^2}$$

d)

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x(\pi/\omega) - x(0)}{\Delta t} \cdot \vec{e}_x + \frac{y(\pi/\omega) - y(0)}{\Delta t} \cdot \vec{e}_y = -\frac{2 \cdot \omega \cdot A}{\pi} \cdot \vec{e}_x + \frac{2 \cdot B}{\pi} \cdot \vec{e}_y$$

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\omega^2 \cdot A^2 + B^2}$$

- **Z5.** Dva tela su istovremeno bačena jedno u susret drugom istom početnom brzinom $v_0 = 50 \text{ m/s}$, jedno vertikalno naviše sa površine zemlje, a drugo vertikalno naniže sa visine H koja je jednaka maksimalnoj visini koju može da dostigne prvo telo. Ubrzanje slobodnog padanja je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Odrediti:
 - Na kojoj visini će se tela sresti.
 - Kolike će im biti brzine u trenutku susreta.

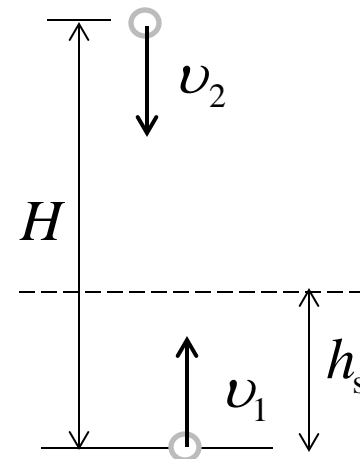
$$a) v_1 = v_0 - g \cdot t$$

$$v_1 = 0 (h_1 = H) \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0}{g} \Rightarrow H = v_0 \cdot t_{\max} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\max}^2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

$$h_1 = h_s = v_0 \cdot t_s - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^2$$

$$h_2 = H - h_s = v_0 \cdot t_s + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_s^2$$

$$H = h_1 + h_2 = 2 \cdot v_0 \cdot t_s \Rightarrow t_s = \frac{H}{2 \cdot v_0}$$



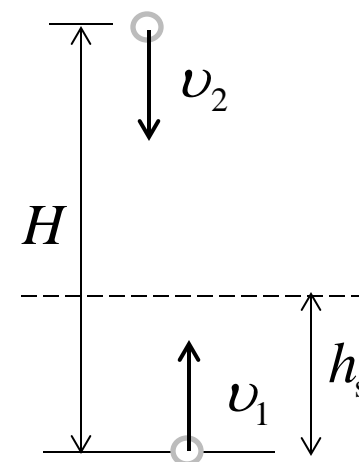
$$h_s = \frac{H}{2} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{H^2}{4 \cdot v_0^2} = \frac{v_0^2}{4 \cdot g} - \frac{g}{8 \cdot v_0^2} \cdot \frac{v_0^4}{4 \cdot g^2} = \frac{7}{32} \cdot \frac{v_0^2}{g} = 55,75 \text{ m}$$

b)

$$t_s = \frac{H}{2 \cdot v_0} = \frac{v_0^2}{4 \cdot v_0 \cdot g} = \frac{v_0}{4 \cdot g}$$

$$v_1 = v_0 - g \cdot t_s = v_0 - \frac{v_0}{4} = \frac{3}{4} \cdot v_0 = 37,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = v_0 + g \cdot t_s = \frac{5}{4} \cdot v_0 = 62,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



- **Z6.** Jedan automobil se polovinu puta kreće brzinom intenziteta v_1 , trećinu puta brzinom intenziteta v_2 , a preostali deo puta brzinom intenziteta v_3 . Odrediti srednju brzinu kretanja automobila na celom putu.

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}$$

$$\Delta s_1 = \frac{\Delta s}{2} = v_1 \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta s}{2 \cdot v_1}$$

$$\Delta s_2 = \frac{\Delta s}{3} = v_2 \cdot \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta s}{3 \cdot v_2}$$

$$\Delta s_3 = \Delta s - \frac{\Delta s}{2} - \frac{\Delta s}{3} = \frac{\Delta s}{6} = v_3 \cdot \Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{\Delta s}{6 \cdot v_3}$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{\Delta s}{\frac{\Delta s}{2 \cdot v_1} + \frac{\Delta s}{3 \cdot v_2} + \frac{\Delta s}{6 \cdot v_3}} = \frac{6 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3}{3 \cdot v_2 \cdot v_3 + 2 \cdot v_1 \cdot v_3 + v_1 \cdot v_2}$$

- **D1.** Tanak vertikalni štapa dužine $l = 1$ m postavljen je uz vertikalni zid. Donji kraj štapa kreće se stalnom brzinom $v_0 = 0,2$ m/s, pri čemu je štapa sve vreme u kontaktu sa vertikalnim zidom svojim gornjim krajem, odnosno podom svojim donjim krajem. Odrediti koliku brzinu i ubrzanje ima gornji kraj štapa nakon 1,5 s?

Rešenje:

$$v = -6,3 \text{ cm/s}$$

$$a = -4,6 \text{ cm/s}^2$$

- **D2.** Materijalna tačka se kreće u x,y ravni po zakonu:

$$x(t) = A \cdot t, y(t) = A \cdot t \cdot (1 - B \cdot t)$$

pri čemu je $A = 3 \text{ m/s}$, $B = 0,5 \text{ s}^{-1}$, a t vreme. Naći:

- a) Jednačinu putanje po kojoj se kreće tačka.
- b) Brzinu i ubrzanje tačke u zavisnosti od vremena.
- c) Ugao koji vektori brzine i ubrzanja obrazuju nakon 2 s.

Rešenje:

a) $y = x - \frac{1}{6} x^2$

b) $\vec{v} = A \cdot \vec{e}_x + (A - 2 \cdot A \cdot B \cdot t) \cdot \vec{e}_y$

$$\vec{a} = -2 \cdot A \cdot B \cdot \vec{e}_y$$

c) 45°

- **D3.** Telo je pušteno da slobodno pada sa visine $H = 200$ m. U istom trenutku sa površine Zemlje izbačeno je drugo telo vertikalno naviše. Odrediti:
 - a) Kojom početnom brzinom v_0 bi trebalo izbaciti drugo telo da bi se oba tela mimoišla na visini $h = 144$ m od površine zemlje.
 - b) Koliko iznosi maksimalna visina koju može da dostigne drugo telo, ako mu se saopšti početna brzina v_0 određena pod a).Ubrzanje slobodnog padanja iznosi $g = 9,81$ m/s².

Rešenje:

$$v_0 = 59,17 \text{ m/s}$$

$$h_{\max} = 178,44 \text{ m}$$

- **D4.** Plastična loptica koja je puštena bez početne brzine sa visine $h = 1$ m nekoliko puta odskoči od poda. Od momenta početka padanja loptice do momenta njenog drugog udara o pod protekne 1,3 s. Odrediti koliko puta se smanji brzina kojom loptica odskače od poda u odnosu na brzinu kojom pada na pod.

Ubrzanje slobodnog padanja iznosi $g = 9,81$ m/s².

Rešenje: 0,94 puta.

- **D5.** Telo se pusti da slobodno pada sa visine $H = 20,0$ m. Koliki put pređe telo za:
 - a) $\Delta t = 0,1$ s na samom početku kretanja?
 - b) za poslednjih $\Delta t = 0,1$ s?
 - c) na kojoj visini brzina tela iznosi $3/4$ maksimalne brzine tela?Ubrzanje slobodnog padanja je $g = 10$ m/s².

Rešenje:

- a) $h_1 = 0,05$ m
- b) $h_2 = 1,95$ m
- c) $h_3 = 8,75$ m