

Dinamika fluida

- Za nestišljive fluide koji se kreću važi jednačina kontinuiteta koja se odnosi na zapreminski i maseni protok fluida:

$$Q_V = \frac{dV}{dt} = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = \text{const.} \quad Q_m = \rho \cdot Q_V = \text{const.}$$

- Na stacionarno i laminarno proticanje idealnog (nestišljivog i neviskozno) fluida može da se primeni Bernulijeva jednačina:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

- Toričelijeva teorema – brzina isticanja fluida kroz otvor na sudu:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

- Kad viskozni fluid protiče kroz cev kružnog preseka, tada je:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4 \cdot \eta \cdot l} \cdot (R^2 - r^2) \quad (\text{raspodela brzine duž poprečnog preseka})$$

$$Q_V = \frac{\pi \cdot R^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot (p_1 - p_2) \quad (\text{Poazjeev zakon})$$

- **Z1.** Na širokom otvorenom cilindričnom sudu koji je ispunjen vodom do nivoa $H = 1$ m od dna suda nalaze se dva mala otvora kroz koje ističe voda. Niži otvor nalazi se na visini $h_1 = 0,25$ m od dna suda. Odrediti visinu drugog otvora u odnosu na horizontalnu podlogu:
 - a) ako mlazevi vode iz oba otvora treba da pogode istu tačku,
 - b) tako da domet mlaza iz drugog otvora bude maksimalan.

Rešenje:

$$\text{a) } v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_1)} \quad D_1 = v_1 \cdot t_1 \quad t_1 = \sqrt{2 \cdot h_1 / g}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_2)} \quad D_2 = v_2 \cdot t_2 \quad t_2 = \sqrt{2 \cdot h_2 / g}$$

$$D_1 = D_2 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_1)} \cdot \sqrt{2 \cdot h_1 / g} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_2)} \cdot \sqrt{2 \cdot h_2 / g}$$

$$h_2^2 - H \cdot h_2 + h_1 \cdot (H - h_1) = 0 \Rightarrow h_2 = H - h_1 = 0,75 \text{ m}, (h_1 \neq h_2)$$

$$\text{b) } D_2 = 2 \cdot \sqrt{h_2 \cdot (H - h_2)}$$

$$\frac{dD_2}{dh_2} = 0 \Rightarrow h_2 = H / 2 = 0,5 \text{ m}$$

- **Z2.** Kroz horizontalnu cev promenljivog poprečnog preseka struji tečnost gustine ρ . Površina poprečnog preseka šireg dela cevi je S_1 , a užeg dela S_2 . Razlika pritiska u ta dva dela cevi je Δp . Odrediti zapreminski protok tečnosti u cevi i brzine proticanja tečnosti kroz oba preseka.

Rešenje:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2, h_1 = h_2$$

$$Q_V = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow v_1 < v_2 \Rightarrow p_1 > p_2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot Q_V^2 \cdot \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2} \right)$$

$$Q_V = S_1 \cdot S_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}}$$

$$v_1 = S_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}} \quad v_2 = S_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}}$$

- **Z3.** Cilindrični sud visine h_0 i površine poprečnog preseka S napunjen je do vrha vodom. Na dnu suda načinjen je otvor površine $S_0 \ll S$. Zanemarujući viskoznost vode odrediti:
 - a) koliko vremena je potrebno da sva voda istekne iz suda,
 - b) za koliko vremena bi istekla ista količina vode ako se nivo vode u sudu održava na stalnoj visini h_0 dolivanjem vode.

Rešenje:

$$a) \quad p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_0^2$$

$$v^2 + 2 \cdot g \cdot h = v_0^2 = v^2 \cdot \frac{S^2}{S_0^2} \Rightarrow v = S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h}{S^2 - S_0^2}} \approx \frac{S_0}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = -\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_0}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot dt \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{h} = -\frac{S_0}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot t + C; t = 0, h = h_0 \Rightarrow C = 2 \cdot \sqrt{h_0}$$

$$2 \cdot \sqrt{h_0} - 2 \cdot \sqrt{h} = \frac{S_0}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot t \Rightarrow (h = 0) t_1 = \frac{S}{S_0} \cdot \sqrt{2 \cdot h_0 / g}$$

$$b) \quad t_2 = V / Q_V = S \cdot h_0 / (v_0 \cdot S_0) = (S / S_0) \cdot \sqrt{h_0 / 2 \cdot g} = t_1 / 2$$

- **Z4.** Crevo prečnika $d_1 = 4$ cm prikačeno je na hidrant. Pritisak vode u hidrantu je $p_1 = 250$ kPa. Odrediti:
 - brzinu isticanja vode kroz mlaznik na kraju creva prečnika $d_2 = 2$ cm, koji je podignut na nivo $h = 10$ m u odnosu na hidrant,
 - zapreminski i maseni protok vode,
 - visinu na kojoj voda prestaje da teče iz mlaznika.

Atmosferski pritisak je $p_a = 100$ kPa. Trenje zanemariti. ($g = 10$ m/s²)

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 &= p_a + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \quad v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \Rightarrow v_1 \cdot d_1^2 = v_2 \cdot d_2^2 \\
 p_1 - p_a - \rho \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \cdot \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) \\
 v_1 &= \sqrt{\frac{2}{(d_1/d_2)^4 - 1} \cdot \left(\frac{p_1 - p_a}{\rho} - g \cdot h \right)} = 2,58 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_2 &= \frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot v_1 = 10,32 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad Q_V = v_1 \cdot S_1 = v_1 \cdot \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = 3,24 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = 3,24 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\text{c)} \quad v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{(d_1/d_2)^4 - 1} \cdot \left(\frac{p_1 - p_a}{\rho} - g \cdot h_1 \right)} = 0$$

$$\frac{p_1 - p_a}{\rho} - g \cdot h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = \frac{p_1 - p_a}{\rho \cdot g} = 15 \text{ m}$$

- **Z5.** Cev prečnika $d = 0,4$ m se račva u dve grane čiji su prečnici $d_1 = 0,3$ m i $d_2 = 0,2$ m. Centri preseka površina S i S_1 nalaze se na istoj visini, a centar preseka S_2 je za $h = 2$ m niže. Brzina proticanja vode kroz cev je $v = 5$ m/s, a pritisak $p = 20$ kPa. Pritisak u drugoj grani je $p_2 = 15$ kPa. Odrediti brzine proticanja kroz obe grane i pritisak u prvoj grani. ($g = 9,81$ m/s²)

Rešenje:

$$v \cdot S = v_1 \cdot S_1 + v_2 \cdot S_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 - \rho \cdot g \cdot h$$

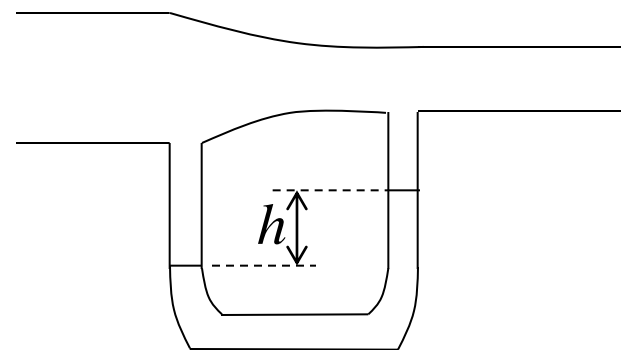
$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \left(p - p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h \right)} = 8,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 = 5,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$p_1 = 19,7 \text{ kPa}$$

- **Z6.** Kroz horizontalnu cev površine poprečnog preseka $S_1 = 300 \text{ cm}^2$ stacionarno struji idealan fluid gustine $\rho = 1360 \text{ kg/m}^3$. Da bi se merio protok, cev je postepeno sužena na $S_2 = 75 \text{ cm}^2$. Ako je razlika nivoa žive u mernoj cevčici $h = 7,5 \text{ cm}$, odrediti zapreminski i maseni protok fluida kroz cev. ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rešenje:



$$\left. \begin{aligned}
 p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \\
 p_1 - p_2 &= \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h \\
 v_1 \cdot S_1 &= v_2 \cdot S_2
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{(S_1/S_2)^2 - 1} \cdot \frac{\rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h}{\rho}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Q_V = v_2 \cdot S_2 = 30 \text{ l/s}$$

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = 40,8 \text{ kg/s}$$

- **Z7.** Na bočnom zidu vertikalnog suda na visini $h_1 = 5$ cm od dna nalazi se otvor. U otvor je stavljena kapilarna cev poluprečnika $r = 1$ mm i dužine $l = 1$ cm. U sudu se nalazi mašinsko ulje gustine $\rho = 900$ kg/m³ i koeficijenta dinamičke viskoznosti $\eta = 0,5$ Pa·s. Nivo ulja u sudu je na visini $h_2 = 50$ cm iznad kapilare ($g = 9,81$ m/s²). Odrediti:
 - srednju brzinu isticanja ulja,
 - masu ulja koja istekne za jednu sekundu,
 - vreme za koje iz suda istekne zapremina od $V = 1$ cm³ ulja,
 - srednje rastojanje od kraja kapilare do mesta na kome mlaz ulja pada na podlogu na kojoj se nalazi sud.

Rešenje:

a)

$$\left. \begin{aligned} Q_V &= \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} \cdot (p_1 - p_2) = v_{sr} \cdot S = v_{sr} \cdot r^2 \cdot \pi \\ p_1 - p_2 &= \rho \cdot g \cdot h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{sr} = \frac{\rho \cdot g \cdot h_2 \cdot r^2}{8 \cdot \eta \cdot l} = 0,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot Q_V \cdot \Delta t = 0,312 \text{ g}$$

c)

$$t_1 = V / Q_V = 2,89 \text{ s}$$

d)

$$d_{\text{sr}} = v_{\text{sr}} \cdot t_2 = v_{\text{sr}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = 1,11 \text{ cm}$$

- **Z8.** Kroz cev dužine l i poluprečnika R protiče tečnost gustine ρ i viskoznosti η . Brzina proticanja tečnosti određena je relacijom $v = v_0 \cdot (R^2 - r^2) / R^2$, gde je v_0 brzina tečnost na sredini cevi, a r poluprečnik uočenog sloja tečnosti.
 - a) Koliki je protok tečnosti kroz cev?
 - b) Kolika je kinetička energija tečnosti u cevi?
 - c) Kolika je razlika pritisaka na krajevima cevi?

Rešenje:

$$a) \quad dQ_V = v \cdot dS = v_0 \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$$

$$Q_V = \frac{2 \cdot \pi \cdot v_0}{R^2} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \cdot v_0 \cdot R^2}{2}$$

$$b) \quad dE_k = \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot v_0^2 \cdot \frac{(R^2 - r^2)^2}{R^4} \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot dr$$

$$E_k = \frac{\pi \cdot \rho \cdot l \cdot v_0^2}{R^4} \cdot \int_0^R (R^2 - r^2)^2 \cdot r \cdot dr = \frac{\pi \cdot \rho \cdot l \cdot v_0^2 \cdot R^2}{6}$$

$$c) \quad Q_v = \frac{\pi \cdot R^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi \cdot v_0 \cdot R^2}{2} \Rightarrow \Delta p = \frac{4 \cdot l \cdot \eta \cdot v_0}{R^2}$$

- **D1.** Kroz vertikalnu konusnu cev promenljivog poprečnog preseka struji voda gustine $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Površine dva poprečna preseka cevi su $S_1 = 8 \text{ cm}^2$ i $S_2 = 5 \text{ cm}^2$. Razlika pritiska u tim presecima je $\Delta p = 3,5 \text{ kPa}$, a visinska razlika $\Delta h = 20 \text{ cm}$. Odrediti brzinu proticanja vode kroz drugi presek.

Rešenje:

$$v_2 = S_1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (\Delta p - \rho \cdot g \cdot h)}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}} = 2,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **D2.** U otvorenom širokom sudu sa otvorom na dnu nalazi se sloj vode visine $h_1 = 30$ cm, a iznad njega sloj ulja visine $h_2 = 50$ cm. Gustina ulja je $\rho_2 = 800$ kg/m³. Odrediti brzinu v isticanja vode iz suda. ($g = 9,81$ m/s²)

Rešenje:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (\rho_1 \cdot h_1 + \rho_2 \cdot h_2)}{\rho_1}} = 3,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- **D3.** Površina poprečnog preseka šprica iznosi $S_1 = 1,2 \text{ cm}^2$, a površina poprečnog preseka njegovog otvora je $S_2 = 1 \text{ mm}^2$. Špric se nalazi u horizontalnom položaju. Ako na klip deluje sila $F = 5 \text{ N}$ i pri tom ga pomeri za $L = 4 \text{ cm}$, odrediti:

- brzinu isticanja vode iz šprica,
- vreme za koje će voda isteći iz šprica,
- rad sile F pri pomeranju klipa za L .

Gustine vode je $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Zanemariti stišljivost vode.

Rešenje:

$$\text{a) } p_a + \frac{F}{S_1} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 = p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \Rightarrow \frac{F}{S_1} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 \cdot \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot F \cdot S_1}{\rho \cdot (S_1^2 - S_2^2)}} = 9,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{b) } t = \frac{V}{Q_V} = \frac{L \cdot S_1}{v_2 \cdot S_2} = 0,53 \text{ s}$$

$$\text{c) } A = F \cdot L = 0,2 \text{ J}$$

- **D4.** Pitoova cev postavljena je u gasovod na način prikazan na slici. Površina poprečnog preseka gasovoda je $S = 0,5 \text{ m}^2$, a protok gasa $Q_V = 2 \text{ m}^3/\text{s}$. Ako su gustine tečnosti i gasa $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$ i $\rho_2 = 1,3 \text{ kg/m}^3$ redom, odrediti u kojoj cevi je nivo tečnosti viši i za koliko. ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

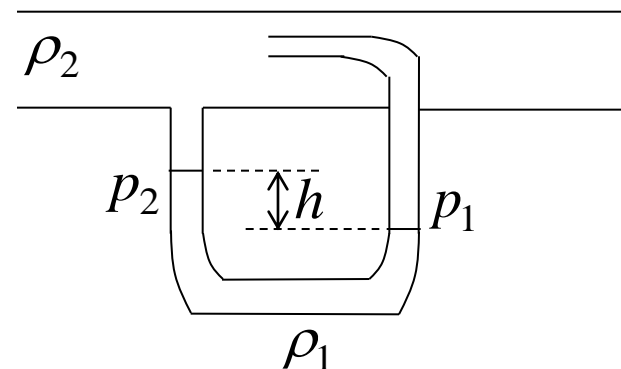
Rešenje:

gas ne može da se kreće kroz cevčicu ($v_1=0$):

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho_2 \cdot v_2^2$$

$$p_1 = p_2 + \rho_1 \cdot g \cdot h$$

$$h = \frac{\rho_2}{2 \cdot \rho_1 \cdot g} \cdot \left(\frac{Q_V}{S} \right)^2 = 1,18 \text{ mm}$$



- **D5.** Voda ističe iz širokog rezervoara kroz vertikalnu konusnu tubu postavljenu na dno rezervoara. Dužina tube je L , prečnik gornje osnove je d_1 , a prečnik donje osnove d_2 . Odrediti pri kom nivou vode H u rezervoaru će pritisak u gornjem preseku tube biti p , ako je atmosferski pritisak p_a . Gustina vode je ρ , a ubrzanje slobodnog padanja je g .

Rešenje:

$$H = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\rho \cdot g \cdot L + (p - p_a) \cdot (d_1 / d_2)^4}{(d_1 / d_2)^4 - 1}$$

- **D6.** Voda ističe iz suda kroz kapilaru dužine l . Visina stuba tečnosti u sudu je $h = 1$ m, a dinamička viskoznost $\eta = 1,14$ mPa·s. Kapilara je postavljena horizontalno i njen poluprečnik iznosi $r = 0,5$ mm. Kolika treba da je dužina kapilare da bi protok bio isti kao kad se voda smatra neviskoznom fluidom. ($g = 9,81$ m/s²)

Rešenje:

$$l = \frac{\rho \cdot r^2}{8 \cdot \eta} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot h}{2}} = 6,07 \text{ cm}$$