МЕХАНИКА

ЈЕ ОБЛАСТ ФИЗИКЕ КОЈА ПРОУЧАВА КРЕТАЊЕ ТЕЛА У УЖЕМ СМИСЛУ (ЊИХОВО ПОМЕРАЊЕ У ПРОСТОРУ ТОКОМ ВРЕМЕНА ПО НЕРЕЛАТИВИСТИЧКОЈ ТЕОРИЈИ). ДЕЛИ СЕ НА:

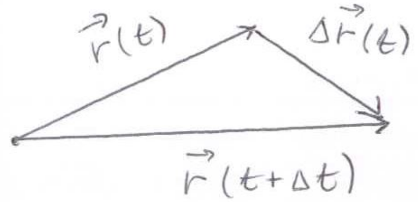
а) КИНЕМАТИКА - САМО ВРШИ ОПИСИВАЊЕ КРЕТАЊА НЕ УПУШТАЈУЋИ СЕ У АНАЛИЗУ УЗРОКА КОЈИ ИЗАЗИВАЈУ БАШ ТАКВО ОПИСАНО КРЕТАЊЕ,

б) ДИНАМИКА - АНАЛИЗИРА УЗРОКЕ КОЈИ ДОВОДЕ ДО СПЕЦИФИЧНОГ ОБЛИКА КРЕТАЊА ПОСМАТРАНОГ ТЕЛА.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ (МТ)

МАТЕРИЈАЛНА ТАЧКА ЈЕ НАЈЈЕДНОСТАВНИЈИ ОБЈЕКАТ ЧИЈЕ КРЕТАЊЕ ПРОУЧАВАМО. М.Т. МОЖЕ БИТИ БИЛО КОЈЕ ТЕЛО ЧИЈА НАЈВЕЋА ДИМЕНЗИЈА БИВА ДОВОЉНО (ЗАНЕМАРЉИВО) МАЛА У ОДНОСУ НА ДИМЕНЗИЈЕ ПРОСТОРА У КОМЕ СЕ ЊЕНО КРЕТАЊЕ ПРОУЧАВА. ДЕФИНИЦИЈА МТ НЕМА НИКАКВЕ ВЕЗЕ СА ЊЕНОМ МАСОМ.

ПОЛОЖАЈ МТ У ПРОСТОРУ ОПИСУЈЕ СЕ ВЕКТОРОМ ПОЛОЖАЈА (РАДИЈУС ВЕКТОР) $\vec{r}(t)$ - ВЕКТОР КОЈИ СПАЈА УСВОЈЕНИ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК И ТРЕНУТНИ ПОЛОЖАЈ МТ КОЈА СЕ КРЕЋЕ.



$\vec{r}(t)$ - ВЕКТОР ПОЛОЖАЈА У ТРЕНУТКУ t

$\vec{r}(t+\Delta t)$ - ВЕКТОР ПОЛОЖАЈА У ТРЕНУТКУ $t+\Delta t$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$ ПРОМЕНА ВЕКТОРА ПОЛОЖАЈА

ДЕФИНИШУ СЕ СЛЕДЕЋИ КОЛИЧНИЦИ:

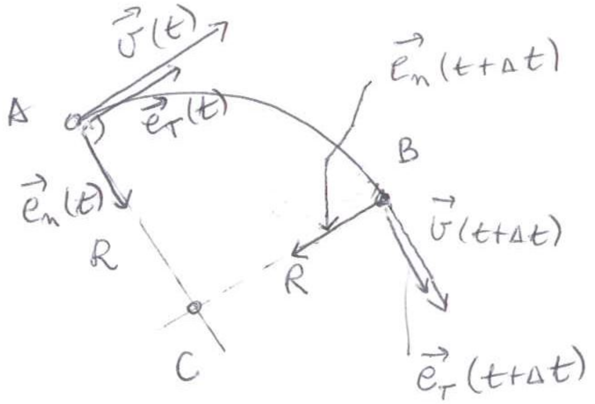
1) $$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \langle\vec{v}\rangle$$ СРЕДЊА БРЗИНА НА ИНТЕРВАЛУ Δt

2) $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$$ ТРЕНУТНА БРЗИНА

2) $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \langle\vec{a}\rangle$ СРЕДЊЕ УБРЗАЊЕ НА ИНТЕРВАЛУ Δt

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \dot{\vec{v}}$$ ТРЕНУТНО УБРЗАЊЕ

КРИВА КОЈУ ОПИСУЈЕ ВРХ ВЕКТОРА ПОЛОЖАЈА НАЗИВА СЕ ПУТАЊА или ТРАЈЕКТОРИЈА. ВЕКТОР (ТРЕНУТНЕ) БРЗИНЕ УВЕК ИМА ПРАВАЦ ТАНГЕНТЕ НА ТРАЈЕКТОРИЈУ. АКО ЈЕ ПУТАЊА ЗАКРИВЉЕНА ГЛАТКА ЛИНИЈА УБРЗАЊЕ ИМА ДВЕ КОМПОНЕНТЕ:



ТРЕНУТНИ ЦЕНТАР КРИВИНЕ C

a_T - ТАНГЕНЦИЈАЛНО УБРЗАЊЕ

a_n - НОРМАЛНО УБРЗАЊЕ

1) $a_T = \dfrac{d}{dt}|\vec{v}| = \dfrac{dv}{dt}$ УСМЕРЕНО У ПРАВЦУ ТАНГЕНТЕ

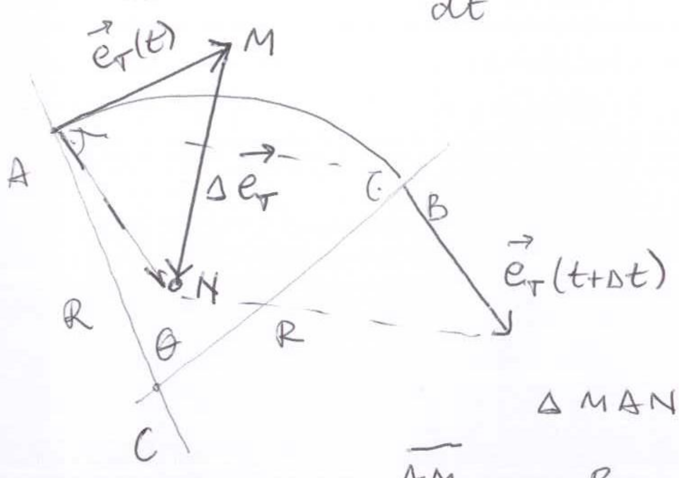
$v = |\vec{v}|$ - МОДУЛ (ИНТЕНЗИТЕТ) ВЕКТОРА БРЗИНЕ

2) a_n - УВЕК УСМЕРЕНО КА ТАЧКИ C

$\overline{AC} \simeq \overline{BC} = R$ ТРЕНУТНИ ПОЛУПРЕЧНИК КРИВИНЕ ПУТАЊЕ

$\vec{v}(t) = v(t)\cdot\vec{e}_T(t) \Rightarrow$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{e}_T(t) + v(t)\cdot\frac{d\vec{e}_T}{dt} \qquad \frac{d\vec{e}_T}{dt} = ?$$



ОВАЈ ИЗВОД ВЕКТОРА ПОТРАЖИЋЕМО ОВАКО: СА СЛИКЕ СЕ ВИДИ ДА ЈЕ $\Delta\vec{e}_T$ ИСТОГ ПРАВЦА И СМЕРА КАО $\vec{e}_n$ ЗА ДОВОЉНО МАЛО Δt (КА C): $|\vec{e}_T(t)| = 1$

$\Delta MAN \simeq \Delta ACB \Rightarrow$

$$\frac{\overline{AM}}{|\Delta\vec{e}_T|} = \frac{R}{\overline{AB}} \simeq \frac{R}{\widehat{AB}} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{|\Delta\vec{e}_T|}{v\Delta t}$$

ПА ЈЕ: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{e}_T|}{\Delta t} = \frac{v}{R}$, ТЈ: $\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \vec{e}_n$

САДА СЕ ВЕКТОР УБРЗАЊА МОЖЕ НАПИСАТИ КАО:

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_T + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_n = a_T \cdot \vec{e}_T + a_n \cdot \vec{e}_n$ И ОВО СЕ НАЗИВА ПРИРОДНИ НАЧИН ОПИСИВАЊА КРЕТАЊА.

$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_T \text{ – ОРТ ТАНГЕНТЕ (СА ИЗАБРАНИМ СМЕРОМ)} \\ \vec{e}_n \text{ – ОРТ НОРМАЛЕ} \end{array}\right\}$ ЈЕДИНИЧНИ ВЕКТОРИ

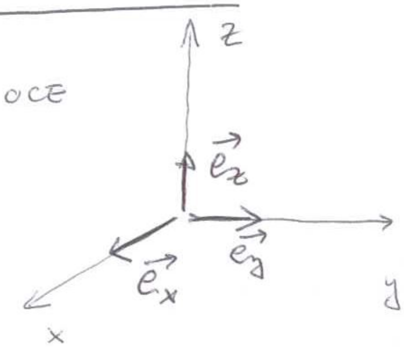
1) АКО ЈЕ ПУТАЊА ПРАВА ЛИНИЈА $R \to +\infty$

2) АКО ЈЕ ПУТАЊА КРУЖНИЦА $R = const$

3) ЗА ОСТАЛЕ КРИВЕ ЈЕ $R = R(t)$ (ПРОМЕНЉИВО)

КРЕТАЊЕ МТ МОЖЕ СЕ ПРЕДСТАВИТИ У РАЗНИМ КООРДИНАТНИМ СИСТЕМИМА (ДЕКАРТОВ, ЦИЛИНДРИЧНИ, СФЕРНИ....). У НАШЕМ КУРСУ МИ ЋЕМО КОРИСТИТИ САМО ДЕКАРТОВ.

ДЕКАРТОВ ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ



КАРАКТЕРИШУ ГА ТРИ УЗАЈАМНО НОРМАЛНЕ ОСЕ x, y, z СА СВОЈИМ ЈЕДИНИЧНИМ ВЕКТОРИМА $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ КОЈИ НЕ ЗАВИСЕ ОД ВРЕМЕНА ($\dot{\vec{e}}_x = 0$, $\dot{\vec{e}}_y = 0$, $\dot{\vec{e}}_z = 0$). ТАДА ЈЕ:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$$

ГДЕ СУ v_x, v_y, v_z ОДГОВАРАЈУЋЕ КОМПОНЕНТЕ ВЕКТОРА БРЗИНЕ.

СЛИЧНО ЈЕ: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{e}_x + \dot{v}_y\vec{e}_y + \dot{v}_z\vec{e}_z = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

a_x, a_y, a_z СУ ОДГОВАРАЈУЋЕ КОМПОНЕНТЕ ВЕКТОРА УБРЗАЊА.

МОДУЛИ (ИНТЕНЗИТЕТИ) БРЗИНЕ И УБРЗАЊА САДА БИЋЕ:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad , \quad |\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

САДА СЕ ТАНГЕНЦИЈАЛНО УБРЗАЊЕ МОЖЕ ЗАПИСАТИ КАО:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{v_x \cdot \dot{v}_x + v_y \cdot \dot{v}_y + v_z \cdot \dot{v}_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \Rightarrow$$

$$a_T = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \Rightarrow \qquad a_T = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}|}$$

КОРИСТЕЋИ РЕЛАЦИЈУ $a_T^2 + a_n^2 = a^2$ САД СЕ МОЖЕ ОДРЕДИТИ $\underline{a_n}$, А ЗАТИМ И $\underline{R}$. АКО (РАДИ ЈЕДНОСТАВНОСТИ) ПОСМАТРАМО КРЕТАЊЕ У xOy РАВНИ ТРАЈЕКТОРИЈА СЕ МОЖЕ ЗАДАТИ НА СЛЕДЕЋЕ НАЧИНЕ:

а) <u>ПАРАМЕТАРСКИ</u>: $x(t), y(t)$ ГДЕ ЈЕ ВРЕМЕ $\underline{t}$ ПАРАМЕТАР ЧИЈИ СЕ ДОМЕН МОРА ДЕФИНИСАТИ.

б) <u>ЕКСПЛИЦИТНО</u>: $y = f(x)$ (ИЛИ $x = \varphi(y)$)

в) <u>ИМПЛИЦИТНО</u>: $\varphi(x, y) = 0$

ПОСЛЕДЊА ДВА СЕ ДОБИЈАЈУ ЕЛИМИНАЦИЈОМ ВРЕМЕНА $\underline{t}$ ИЗ ПАРАМЕТАРСКЕ ФОРМЕ.

НА КРАЈУ ТРЕБА ПОДВУЋИ РАЗЛИКУ ИЗМЕЂУ:

$$\vec{r}(T) - \vec{r}(0) = \int_0^T \vec{v}(t)\,dt$$ УКУПАН ВЕКТОР ПОМЕРАЈА НА $(0, T)$

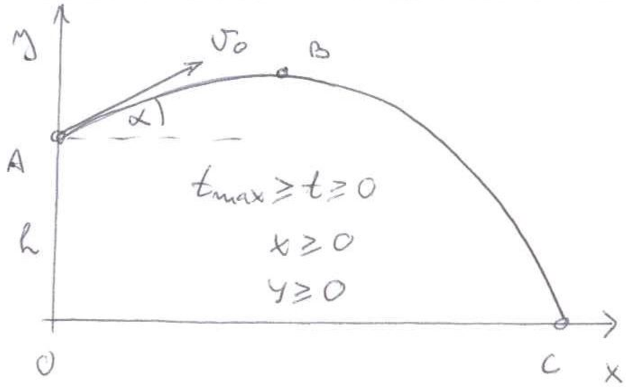
$$s(T) - s(0) = \int_0^T |\vec{v}(t)|\,dt$$ УКУПАН ПРЕЂЕНИ ПУТ НА $(0, T)$

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(T) - \vec{r}(0)}{T - 0}$$ СРЕДЊА ВРЕДНОСТ ВЕКТОРА БРЗИНЕ НА $(0, T)$

$$\langle |\vec{v}(t)| \rangle = \frac{s(T) - s(0)}{T - 0}$$ СРЕДЊА ВРЕДНОСТ ИНТЕНЗИТЕТА БРЗИНЕ НА $(0, T)$

$$|\langle \vec{v} \rangle| \neq \langle |\vec{v}| \rangle$$ У ОПШТЕМ СЛУЧАЈУ

ПРИМЕР: КОСИ ХИТАЦ (БЕЗ ОТПОРА СРЕДИНЕ)



v_0 – ИНТЕНЗИТЕТ ПОЧЕТНЕ БРЗИНЕ

α – ЕЛЕВАЦИОНИ УГАО – УГАО ПРЕМА x-ОСИ

$$\left.\begin{aligned} v_x(0) &= v_0\cos\alpha \\ v_y(0) &= v_0\sin\alpha \\ x(0) &= 0,\ y(0)=h \end{aligned}\right\} \text{ ПОЧЕТНИ УСЛОВИ}$$

$\boxed{a_x = 0,\quad a_y = -g}$ ДЕЛУЈЕ САМО ГРАВИТАЦИОНА СИЛА НАНИЖЕ

ИНТЕГРАЉЕЊЕМ ОВИХ ЈЕДНАЧИНА УЗ ПОЧЕТНЕ УСЛОВЕ ДОБИЈА СЕ:

$$v_x(t) = v_0\cos\alpha \qquad x(t) = v_0 t\cos\alpha$$

$$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt \qquad y(t) = h + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

НА ПУТАЊИ СЕ ИЗДВАЈАЈУ ТРИ ТАЧКЕ:

A) <u>ТАЧКА ИЗ КОЈЕ ЈЕ МТ ИСПАЉЕНА</u> ОКАРАКТЕРИСАНА СА $t=0$ (ПОЧЕТНИ УСЛОВИ)

B) <u>МАКСИМАЛНА ВИСИНА:</u> ТАДА ЈЕ: $v_y(t_B) = 0 \Rightarrow$

$$t_B = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \Rightarrow Y_{max} = Y_B = h + v_0 t_B\sin\alpha - \frac{1}{2}g t_B^2 \Rightarrow$$

$$Y_{max} = h + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

C) <u>ДОМЕТ:</u> УДАЉЕНОСТ МЕСТА ПАДА ОД КООРДИНАТНОГ ПОЧЕТКА:

$$y(t_c) = 0 \Rightarrow h + v_0 t_c\sin\alpha - \frac{1}{2}g t_c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$t_c^2 - \left(2\frac{v_0}{g}\sin\alpha\right)\cdot t_c - \frac{2h}{g} = 0 \quad , t_c > 0 \quad \text{ПА ЈЕ:}$$

$$t_c = \frac{v_0\sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \quad \text{И ДОМЕТ ЈЕ:}$$

$$D = x(t_c) = v_0 t_c\cos\alpha$$

<u>СПЕЦИЈАЛАН СЛУЧАЈ:</u> $h = 0 \Rightarrow t_c = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow$

$D = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$; ЗА ЗАДАТО (ФИКСНО) v_0 БИЋЕ

$D_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$ КАД ЈЕ $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{4}}$

<u>ПОЛУПРЕЧНИК КРИВИНЕ КОД КОСОГ ХИЦА R</u> МОЖЕ СЕ ОДРЕДИТИ НА ВЕЋ ОПИСАНИ НАЧИН:

$$a_T = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = -\frac{g v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} \Rightarrow a_n^2 = g^2 - a_T^2 = g^2 - \frac{g^2 v_y^2}{v_x^2+v_y^2} =$$

$$= \frac{g^2 v_x^2}{v_x^2+v_y^2} \Rightarrow a_n = \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} = \frac{v_x^2+v_y^2}{R} \Rightarrow R = \frac{(v_x^2+v_y^2)^{3/2}}{g v_x} \Rightarrow$$

$$R(t) = \frac{\left[(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2\right]^{3/2}}{g v_0 \cos\alpha}$$

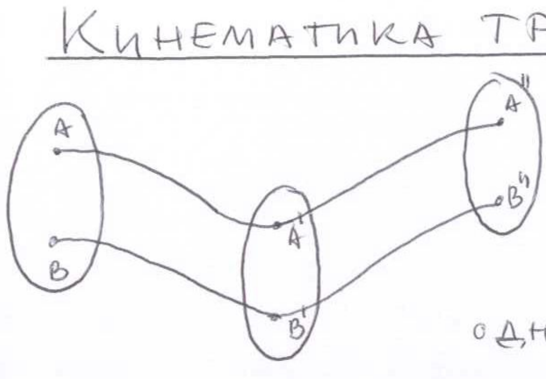
ЗАНИМЉИВО ЈЕ И ОДРЕДИТИ ЗАВИСНОСТ $R(y)$:

$$R = \frac{(v_0^2 - 2v_0 g t \sin\alpha + g^2t^2)^{3/2}}{g v_0\cos\alpha} = \frac{\left[v_0^2 - 2g\left(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\right)\right]^{3/2}}{g v_0 \cos\alpha} \Rightarrow$$

$$R(y) = \frac{\left[v_0^2 - 2g(y-h)\right]^{3/2}}{g v_0\cos\alpha}$$ ЗАКЉУЧАК: $y \nearrow \; R(y) \searrow$

<u>КИНЕМАТИКА ТРАНСЛАЦИЈЕ</u>

ТРАНСЛАЦИЈА ЈЕ ТАКВО КРЕТАЊЕ КРУТОГ ТЕЛА КОД КОГА СВЕ ЊЕГОВЕ МТ ОПИСУЈУ <u>ИСТОВЕТНЕ (ПАРАЛЕЛНЕ) ПУТАЊЕ</u>. КРУТО ТЕЛО ЈЕ ТЕЛО КОЈЕ НИЈЕ ДЕФОРМАБИЛНО, ОДНОСНО УЗАЈАМНИ ПОЛОЖАЈ ЊЕГОВИХ МТ СЕ ПРИ ЊЕГОВОМ КРЕТАЊУ НЕ МЕЊА. ТО



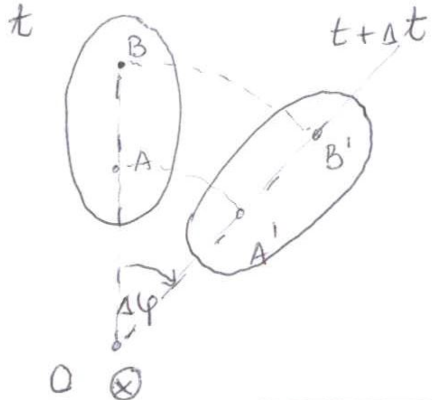
ЗНАЧИ ДА ЈЕ ДОВОЉНО ИЗАБРАТИ ЈЕДНУ ЊЕГОВУ МТ; ПРОУЧИВ-

ШИ ЊЕНО КРЕТАЊЕ ЗНАЋЕМО И КРЕТАЊЕ ЦЕЛОГ ТЕЛА. А КИНЕМАТИКУ МТ СМО УПРАВО ПРОУЧИЛИ.

ПУТАЊА $AA'A''$ СА СЛИКЕ МОЖЕ СЕ ПРЕВЕСТИ У ПУТАЊУ $BB'B''$ ТРАНСЛАЦИЈОМ ЗА ВЕКТОР $\vec{AB} = \vec{A'B'} = \vec{A''B''}$

КИНЕМАТИКА РОТАЦИЈЕ

РОТАЦИЈА КРУТОГ ТЕЛА ЈЕ ТАКВО КРЕТАЊЕ КОД КОГА СВЕ ЊЕГОВЕ МТ ЗА ВРЕМЕ Δt ОПИСУЈУ ИСТИ (ЈЕДНАК) УГАО ОКО ОСЕ РОТАЦИЈЕ, А ПРИ ТОМЕ ПРЕЛАЗЕ РАЗЛИЧИТЕ ПУТЕВЕ.



$\overset{\frown}{AA'} \neq \overset{\frown}{BB'}$ АЛИ ЈЕ $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$

$$\frac{\overset{\frown}{AA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overset{\frown}{BB'}}{\overline{OB}} = \Delta\varphi \,(\mathrm{rad})$$

$\Delta\varphi$ НАЗИВА СЕ ЈОШ И УГАОНИ ПОМЕРАЈ (ИЛИ ПРЕБРИСАНИ УГАО) И МОЖЕМО МУ ПРИПИСАТИ ВЕКТОРСКИ КАРАКТЕР:

$$\boxed{\vec{\Delta\varphi} = \Delta\varphi \cdot \vec{e_z}}$$

ГДЕ ЈЕ $\vec{e_z}$ ОРТ ОСЕ РОТАЦИЈЕ И ПОВЕЗАН ЈЕ СА СМЕРОМ ОПИСИВАЊА $\Delta\varphi$ ПРАВИЛОМ ДЕСНЕ ШАКЕ. САДА МОЖЕМО ДЕФИНИСАТИ УГАОНУ БРЗИНУ:

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} \quad \text{СРЕДЊА УГАОНА БРЗИНА}$$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}} \quad \text{ТРЕНУТНА УГАОНА БРЗИНА}$$

ФОРМАЛНО СЕ МОЖЕ РЕЋИ (АКО СЕ ОСА ПОМЕРА ТОКОМ ВРЕМЕНА)

$$\vec{\omega} = \frac{d}{dt}(\varphi \vec{e_z}) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e_z} + \varphi \frac{d\vec{e_z}}{dt}$$

ЗА РОТАЦИЈУ ОКО ФИКСНЕ ОСЕ (СА КОЈОМ ЋЕМО СЕ У ОВОМ КУРСУ НАЈВИШЕ БАВИТИ) ПОСЛЕДЊИ ЧЛАН ЈЕ 0 $(\dot{\vec{e_z}} = 0)$ ПА ЈЕ:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e_z}$$

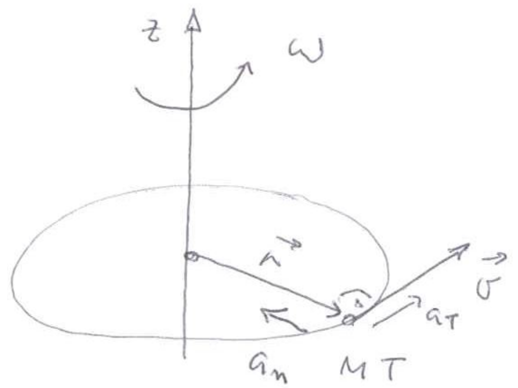
НА СЛИЧАН НАЧИН МОЖЕ СЕ ДЕФИНИСАТИ УГАОНО УБРЗАЊЕ:

$$\langle \vec{\alpha} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$ СРЕДЊЕ УГАОНО УБРЗАЊЕ

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$$ ТРЕНУТНО УГАОНО УБРЗАЊЕ

ЗА РОТАЦИЈУ КРУТОГ ТЕЛА ПРОИЗВОЉНОГ ОБЛИКА ОКО ФИКСНЕ ОСЕ МОГУ СЕ УСТАНОВИТИ ЈЕДНОСТАВНЕ ВЕЗЕ ИЗМЕЂУ ($\vec{v}, a_T, a_n$) БИЛО КОЈЕ ЊЕГОВЕ МТ СА ЈЕДНЕ СТРАНЕ И ПАРАМЕТАРА РОТАЦИЈЕ (ω, α) СА ДРУГЕ СТРАНЕ.

$a_T = r\alpha \quad \alpha = |\vec{\alpha}| \quad a_n = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad v = |\vec{v}|, \ \omega = |\vec{\omega}|$



$v = \omega r \quad (\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r})$

r – РАСТОЈАЊЕ МТ ОД ОСЕ РОТАЦИЈЕ

$\vec{r}$ – УВЕК УСМЕРЕН ОД ОСЕ КА МТ

Поред ротације око фиксне осе постоји и ротација око осе која се креће (тренутне осе). Та се оса може кретати на познати (задати) начин, а може бити и потпуно слободна.

Динамика МТ (а и транслације)

Док је кинематика имала за циљ само да опише кретање МТ, циљ динамике је да утврди зашто се то кретање одвија баш на тај начин, односно који су узроци баш таквог кретања МТ. Ако прихватимо принцип каузалности (свака описана појава мора имати узрок који је изазива), неопходно је увести појам <u>СИЛЕ</u>. За потребе Курса Техничке физике довољно је рећи да је сила векторска величина која је <u>МЕРА ИНТЕРАКЦИЈЕ</u> два или више тела и као такву сре-

ЋЕМО ЈЕ У I ЊУТНОВОМ ЗАКОНУ:

I ЊУТНОВ ЗАКОН КАЖЕ ДА ЈЕ СИЛА УЗРОК ПРОМЕНЕ РЕЖИМА КРЕТАЊА НЕКОГ ТЕЛА. АКО ЈЕ СИЛА ЈЕДНАКА НУЛИ ТЕЛО ЋЕ СЕ КРЕТАТИ СТАЛНОМ БРЗИНОМ ($\vec{v} = const$). РЕЖИМ КРЕТАЊА СЕ НЕЋЕ МЕЊАТИ ($\vec{a} = 0$) И ТАКВО КРЕТАЊЕ НАЗИВАМ КРЕТАЊЕ ПО ИНЕРЦИЈИ.

АКО НА ТЕЛО ИСТОВРЕМЕНО ДЕЛУЈЕ ВИШЕ СИЛА ОНЕ ЋЕ СЕ ВЕКТОРСКИ САБРАТИ ⇒ ВАЖИ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ

II ЊУТНОВ ЗАКОН УТВРЂУЈЕ КВАНТИТАТИВНУ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ УЗРОКА ПРОМЕНЕ РЕЖИМА КРЕТАЊА (СИЛЕ $\vec{F}$) И САМЕ ТЕ ПРОМЕНЕ (УБРЗАЊА $\vec{a}$ КАО ПОСЛЕДИЦЕ); СТВАРНИМ И МИСАОНИМ ЕКСПЕРИМЕНТИМА ЈЕ УТВРЂЕНО:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

ГДЕ ЈЕ m (МАСА) НОВОУВЕДЕНА СКАЛАРНА ВЕЛИЧИНА КАО КОЕФИЦИЈЕНТ ПРОПОРЦИОНАЛНОСТИ. ГОРЊА РЕЛАЦИЈА МОЖЕ СЕ ЗАПИСАТИ И У ОБЛИКУ:

$$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

ЈАСНО ЈЕ ДА ВЕЋА МАСА ИЗАЗИВА СЛАБИЈИ ОДЗИВ НА ПОБУДУ, ПА СЕ МАСА ТЕЛА m МОЖЕ СМАТРАТИ МЕРОМ ЊЕГОВЕ ИНЕРТНОСТИ.

III ЊУТНОВ ЗАКОН (ЗАКОН АКЦИЈЕ И РЕАКЦИЈЕ) КАЖЕ ДА ЈЕ СИЛА $\vec{F}_{12}$ (КОЈОМ ТЕЛО I ДЕЛУЈЕ НА ТЕЛО II) ИСТОГ ИНТЕНЗИТЕТА И ПРАВЦА, А КОНТРА СМЕРА У ОДНОСУ НА $\vec{F}_{21}$ (СИЛА КОЈОМ ТЕЛО II ДЕЛУЈЕ НА ТЕЛО I):

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

ОВА ВЕЗА НИЈЕ УНИВЕРЗАЛНОГ КАРАКТЕРА (НЕ ВАЖИ УВЕК). НАЈЧЕШЋЕ ЈЕ НАРУШЕНА КОД ИНТЕРАКЦИЈА КОЈЕ ЗАВИСЕ ОД БРЗИНЕ ТЕЛА (МАГНЕТНА СИЛА). У ВЕЋИНИ СЛУЧАЈЕВА КОЈЕ ПРОУЧАВА

„Обична" механика овај закон ипак важи.

Количина кретања (импулс)

Приликом експерименталног утврђивања израза $\vec{F} = m\vec{a}$ маса тела се у сваком од случајева пондособ није мењала. Самим тим горња релација неће адекватно описати системе са променљивом масом (ракета са горивом) и у том смислу треба је модификовати.

Замислимо следеће: куглицу масе m која се креће брзином $\vec{v}$ треба зауставити силом $\vec{F}$ која делује током временског интервала δ. Лако је установити:

већа m $\Rightarrow$ или већа $\vec{F}$ или дужи δ

већа $\vec{v}$ $\Rightarrow$ или већа $\vec{F}$ или дужи δ

$m, \vec{v}$ фиксно $\Rightarrow$ што мањи δ, то већа $\vec{F}$

Из описаног је јасно да се као једна од релација које добро опис. закључке од малочас намеће:

$$\boxed{m\vec{v} = \vec{F}\cdot\delta}$$

Следећи корак је да се уведе нова физичка величина – количина кретања

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

и постулира релација која представља општи облик II Њутновог закона:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

Промена количине кретања МТ у јединици времена једнака је укупној сили која на њу делује.

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\cdot\vec{v} + m\vec{a}$$

1) Последња релација инсинуира да се тело може убрзавати и без дејства силе (ако $m \searrow$)

2) ЈАСНО ЈЕ ДА РЕЛАЦИЈА $\vec{F} = m\vec{a}$ ПРЕДСТАВЉА СПЕЦИЈАЛАН СЛУЧАЈ II ЊУТНОВОГ ЗАКОНА ($m = const$) (11)

ЗАКОН ОДРЖАЊА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МТ

ПОСМАТРАЈМО СИСТЕМ ОД ДВЕ МТ И СИЛЕ КОЈЕ НА ЊИХ ДЕЛУЈУ:

$$+\begin{cases} \dfrac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{F_1} = \vec{F_1}^{ext} + \vec{F_{21}} \\ \dfrac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{F_2} = \vec{F_2}^{ext} + \vec{F_{12}} \end{cases}$$

$\vec{F_1}^{ext}$, $\vec{F_2}^{ext}$ СУ СПОЉАШЊЕ СИЛЕ КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА I И II ТЕЛО РЕСПЕКТИВНО.

$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}}$ УЗАЈАМНА СИЛА

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{F_1}^{ext} + \vec{F_2}^{ext} + \underbrace{(\vec{F_{12}} + \vec{F_{21}})}_{0} = \vec{F_1}^{ext} + \vec{F_2}^{ext}$$

УКУПНА ПРОМЕНА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МТ У ЈЕДИНИЦИ ВРЕМЕНА ЈЕДНАКА ЈЕ СУМИ СВИХ ЕКСТЕРНИХ (СПОЉАШЊИХ) СИЛА (ТО СУ ОНЕ СИЛЕ КОЈЕ ПРЕОСТАНУ КАД СЕ ИЗДВОЈЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ САМИХ МТ). АКО ЈЕ СУМА ТИХ ЕКСТЕРНИХ СИЛА ЈЕДНАКА 0 СИСТЕМ НАЗИВАМО ИЗОЛОВАНИМ И ЗА ЊЕГА ВАЖИ:

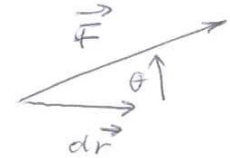
$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p_1} + \vec{p_2} = const} \Rightarrow$$

ЗНАЧИ У ОВОМ СЛУЧАЈУ СЕ УКУПНА КОЛИЧИНА КРЕТАЊА СИСТЕМА МТ НЕ МЕЊА ТОКОМ ВРЕМЕНА $\Rightarrow$ ОДРЖАВА СЕ. ЗАТО СЕ ДАТА РЕЛАЦИЈА НАЗИВА ЗАКОНОМ ОДРЖАЊА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА СИСТЕМА МТ.

МЕХАНИЧКИ РАД И ЕНЕРГИЈА

ДА БИ СЕ НЕКИ ЕФЕКАТ ПОСТИГАО УВЕК ЈЕ ПОТРЕБНО НЕШТО ИЗВРШИТИ, ОДНОСНО НЕКИ РЕСУРС УЛОЖИТИ. НПР. ИЗ ИСКУСТВА ЈЕ ЈАСНО ДА ЈЕ „ЛАКШЕ" НЕКО ТЕЛО ПО ПОДЛОЗИ ПОМЕРИТИ 2m НЕГО 100 m. ДА БИ СЕ ТО „ЛАКШЕ" КВАНТИТАТИВНО ИЗРАЗИЛО УВОДИ СЕ ПОЈАМ МЕХАНИЧКОГ РАДА КОЈИ НЕКА СИЛА ИЗВРШИ ПРИ ПОМЕРАЊУ ОБЈЕКТА ЗА $d\vec{r}$:

$\boxed{dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$ (СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД) $\Rightarrow$



$dA = |\vec{F}|\cdot|d\vec{r}|\cdot\cos\theta$

1) $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ $dA>0$ СИЛА КОНСТРУКТИВНА

2) $\theta=\pi/2$ $dA=0$ ТАКВА (НОРМАЛНА) СИЛА НЕ ВРШИ РАД

3) $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ $dA<0$ СИЛА ЈЕ ДЕСТРУКТИВНА (ОТПОРНА)

ПОЗИТИВНИ РАД НЕКЕ СИЛЕ ИМА ОСОБИНУ ДА СЕ МОЖЕ УСКЛАДИШТИТИ, САЧУВАТИ И ИСКОРИСТИТИ У НЕКОМ КАСНИЈЕМ ТРЕНУТКУ, ДАКЛЕ ИМА ОСОБИНЕ „РЕСУРСА". ТАЈ „РЕСУРС" НАЗИВАМО ЕНЕРГИЈОМ И ОНА МОЖЕ ИМАТИ РАЗНЕ ПОЈАВНЕ ОБЛИКЕ:

1) КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА МТ: ЈЕДНАЧИНА КОЈА ОПИСУЈЕ II ЊУТНОВ ЗАКОН МОЖЕ СЕ СКАЛАРНО ПОМНОЖИТИ СА $d\vec{r}$:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\ \Big/\cdot d\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}\cdot d\vec{r} = dA = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}$$

АКО СУ $\vec{v}(t)$, $\vec{r}(t)$ ФУНКЦИЈЕ ИСКЉУЧИВО ВРЕМЕНА ДОЗВОЉЕНА ЈЕ СЛЕДЕЋА ТРАНСФОРМАЦИЈА:

$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} \equiv d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\cdot d\vec{v} = v\cdot dv$ ГДЕ ЈЕ $v=|\vec{v}|$ ЈЕР ВАЖИ:

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \left(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z\right)\cdot\left(dv_x\vec{e}_x + dv_y\vec{e}_y + dv_z\cdot\vec{e}_z\right) =$$

$$= v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\cdot\frac{v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

$= \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\cdot d\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} = v\,dv$ ПА ЋЕ САДА БИТИ:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m v\,dv \Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\,d\vec{r} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{k2}-E_{k1}$$

ДАКЛЕ УКУПНИ РАД СВИХ СИЛА ПРИ НЕКОМ ПОМЕРАЈУ ЈЕДНАК ЈЕ ПОРАСТУ КИНЕТИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ (ЕНЕРГИЈЕ КРЕТАЊА):

$$E_{k2} = \frac{m v_2^2}{2} + C \, , \quad E_{k1} = \frac{m v_1^2}{2} + C \, , \Rightarrow \quad \boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2 + C}$$

ВАЖНА ОСОБИНА СВАКЕ ЕНЕРГИЈЕ ЈЕ ДА СЕ НЕ МОЖЕ ЈЕДНОЗНАЧНО ОДРЕДИТИ ЊЕН АПСОЛУТНИ ИЗНОС ВЕЋ САМО ЊЕНА ПРОМЕНА (ОДРЕЂУЈЕ СЕ ДО НА КОНСТАНТУ C). У СЛУЧАЈУ НЕРЕЛАТИВИСТИЧКЕ E_k ПРИРОДНО ЈЕ УСВОЈИТИ $C = 0$.

2) <u>ГРАВИТАЦИОНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА</u>

ИЗ УКУПНЕ СИЛЕ КОЈА ДЕЛУЈЕ НА МТ ИЗДВОЈИМО ГРАВИТАЦИОНУ СИЛУ $m\vec{g}$ (КАО НЕИЗБЕЖНУ ЗА КРЕТАЊА БЛИЗУ ПОВРШИНЕ ЗЕМЉЕ); ТАДА ЈЕ:

$$dA = (\vec{F}^* + m\vec{g})\, d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \,/ \cdot d\vec{r} \Rightarrow \quad \vec{F}^* d\vec{r} + m(-g)\, dz = m v\, dv$$

ЈЕР ЈЕ: $\quad \vec{g} \cdot d\vec{r} = -g \cdot \vec{e}_z \cdot (dx\, \vec{e}_x + dy\, \vec{e}_y + dz\, \vec{e}_z) = -g\, dz$

ГДЕ ЈЕ z ВЕРТИКАЛНА КООРДИНАТА УСМЕРЕНА $\uparrow$.

$$A_{12}^* = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^* d\vec{r} = \left(\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} \right) + m g z_2 - m g z_1 = (E_{k2} - E_{k1}) + (E_{p2} - E_{p1})$$

ОЧИГЛЕДНО ЋЕ САДА ГРАВИТАЦИОНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА БИТИ ЈЕДНАКА:

$$\boxed{E_p(z) = m g z + C}$$

<u>РАД СВИХ СИЛА ОСИМ ГРАВИТАЦИОНЕ</u> ЈЕДНАК ЈЕ ПРОМЕНИ <u>МЕХАНИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ</u> МТ:

$$E_{meh} = E_k + E_p = \frac{m v^2}{2} + m g \cdot z + C$$

РАД СПОЉАШЊЕ СИЛЕ НАСУПРОТ ГРАВИТАЦИОНЕ $(\vec{F}^{ext} = -m\vec{g})$ ЈЕДНАК ЈЕ ПОРАСТУ ГРАВИТАЦИОНЕ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r} = A_{12}^{ext} = E_{p2} - E_{p1} \qquad \text{ПРИНЦИП}$$

ЗАКОН ОДРЖАЊА МЕХАНИЧКЕ ЕНЕРГИЈЕ

АКО ЈЕ РАД СВИХ СИЛА ОСИМ ГРАВИТАЦИОНЕ ПРИ НЕКОМ ПОМЕРАЈУ ЈЕДНАК 0 БИЋЕ:

$$dA^* = 0 \Rightarrow mv\,dv + mg\,dz = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{mv^2}{2} + mgz = const}$$

ЗБИР КИНЕТИЧКЕ И ГРАВИТАЦИОНЕ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ (УКУПНА МЕХАНИЧКА ЕНЕРГИЈА) У ОВОМ СЛУЧАЈУ ЈЕ СТАЛАН И НЕ МЕЊА СЕ ТОКОМ ВРЕМЕНА $\Rightarrow$ ОДРЖАВА СЕ. ПРИ ТОМЕ СЕ E_k И E_p ПОНАОСОБ МОГУ МЕЊАТИ.

ЊУТНОВ ЗАКОН ГРАВИТАЦИЈЕ (ОПШТЕ)

КАЖЕ ДА СЕ ДВЕ МТ МАСА m_1 И m_2 НА РАСТОЈАЊУ r ПРИВЛАЧЕ СИЛОМ:

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

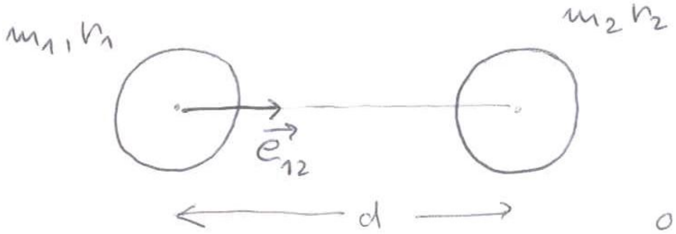
$\vec{e}_{12}$ ОРТ ОД 1 ДО 2

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$ УНИВЕРЗАЛНА ГРАВИТАЦИОНА КОНСТАНТА (НЕ ЗАВИСИ ОД ОСОБИНА ОКОЛНЕ СРЕДИНЕ). ОВАКАВ ПРИСТУП НАЗИВА СЕ ФЕНОМЕНОЛОШКИ И ДОВОЉАН ЈЕ ЗА ПОТРЕБЕ СТУДЕНАТА ТЕХНИЧКИХ ФАКУЛТЕТА. ОН ЕГЗАКТНО ОПИСУЈЕ НЕКУ ПОЈАВУ И ТО КАСНИЈЕ КОРИСТИ У ПРАКСИ, АЛИ НЕ УЛАЗИ У ДЕТАЉНУ АНАЛИЗУ САМЕ ПОЈАВЕ.

АКО СУ ТЕЛА ПРОИЗВОЉНОГ ОБЛИКА И НЕХОМОГЕНА ТРЕБА ОБА ТЕЛА ПОДЕЛИТИ У МТ; ЗАТИМ ПО ГОРЕ НАВЕДЕНОМ ОБРАСЦУ ИЗРАЧУНАТИ СИЛУ ИЗМЕЂУ СВАКЕ МТ I ТЕЛА И СВАКЕ МТ II ТЕЛА (ИНФИНИТЕЗИМАЛНУ) И ТЕ СИЛЕ САБРАТИ. СУМИРАЊЕ ЋЕ ПОСТАТИ ИНТЕГРАЉЕЊЕ, А РАЧУН МОЖЕ БИТИ ЈАКО СЛОЖЕН.

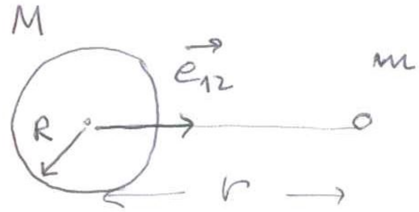
МОЖЕ СЕ ПОКАЗАТИ ДА СИЛА СЛИЧНОГ ОБЛИКА КАО ЗА МТ (КАО ГАУСОВ ЗАКОН У II СЕМЕСТРУ) ВАЖИ И АКО СУ У ПИТАЊУ

Два хомогена тела сферног облика маса $\underline{m_1}$ и $\underline{m_2}$ и полупречника $\underline{r_1, r_2}$ респективно чији се центри налазе на растојању $\underline{d}$:



$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{d^2} \vec{e}_{12}$$

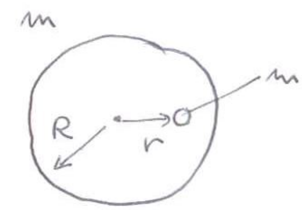
Ово наравно значи да се овакав облик силе може применити и на случај кад је неко од два тела МТ (на пример m_2), а прво тело хомогена кугла (нпр. m_1) → МТ у гравитационом пољу планете Земље:



$$\vec{F}_m = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -\frac{\gamma M m}{(R+h)^2} \cdot \vec{e}_r$$

где је $\underline{h}$ висина МТ изнад површине Земље.

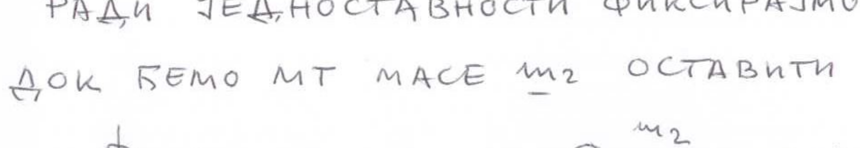
Ако би се МТ налазила у некој шупљини унутар хомогене кугле сила би била:



$$\vec{F}_m = -\gamma m \cdot M \cdot \frac{\frac{4\pi}{3} r^3}{\frac{4\pi}{3} R^3} \cdot \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = -\gamma m M \cdot \frac{r}{R^3} \cdot \vec{e}_r$$

Рад Њутнове гравитационе силе

Ради једноставности фиксирајмо положај МТ масе $\underline{m_1}$, док ћемо МТ масе $\underline{m_2}$ оставити покретном:



$$dA_g = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

јер је $\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = dr$ и

ово је рад који гравитациона сила изврши при померању МТ масе $\underline{m_2}$ за $d\vec{r}$. Рад спољашње силе (насупрот грави-

ТАЦИОНЕ) БИЋЕ ЈЕДНАК ПОРАСТУ ГРАВИТАЦИОНЕ ПОТЕНЦИЈАЛНЕ ЕНЕРГИЈЕ:

$$dA^{ext} = \vec{F}^{ext}\cdot d\vec{r} = (-\vec{F}_g)\cdot d\vec{r} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr \quad \text{ПА ЈЕ:}$$

$$A^{ext}_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b}\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}dr = -\gamma\frac{m_1m_2}{r}\Big|_{r_a}^{r_b} = \left(-\gamma\frac{m_1m_2}{r_b}\right)-\left(-\gamma\frac{m_1m_2}{r_a}\right)$$

$$\Rightarrow A^{ext}_{a\to b} = E_{pb}-E_{pa} \quad \text{ГДЕ ЈЕ} \quad \boxed{E_p(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}+C}$$

УЗАЈАМНА ГРАВИТАЦИОНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА ДВЕ МТ НА РАСТОЈАЊУ r. ИЗБОР КОНСТАНТЕ C НАЗИВА СЕ КАЛИБРАЦИЈА (МОЖЕ СЕ ИЗАБРАТИ $C=0$, АЛИ И НЕ МОРА). ИЗБОР $C=0$ ОДГОВАРА ЕНЕРГИЈИ МЕРЕНОЈ У ОДНОСУ НА РЕФЕРЕНТНИ ПОЛОЖАЈ КАДА СУ МТ БЕСКОНАЧНО УДАЉЕНЕ ЈЕДНА ОД ДРУГЕ. ИСТОВЕТНА ЈЕ СИТУАЦИЈА И У СЛУЧАЈУ ХОМОГЕНЕ КУГЛЕ И МТ НА РАСТОЈАЊУ r ОД ЦЕНТРА КУГЛЕ; У СЛУЧАЈУ МАЛИХ УДАЉЕНОСТИ МТ ОД НАЈБЛИЖЕ ТАЧКЕ НА ПОВРШИНИ КУГЛЕ ИЗРАЗ СЕ МОЖЕ СВЕСТИ НА ОДРАНИЈЕ ПОЗНАТИ: $\boxed{E_p(h)\simeq mgh}$

$$E_p(r) = E_p(h) = -\frac{\gamma m M}{r}+C = -\frac{\gamma m M}{R+h}+C = -\frac{\gamma mM}{R}\cdot\frac{1}{1+\frac{h}{R}}+C$$
$h<<R$

$$\simeq -\frac{\gamma mM}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)+C = -\frac{\gamma mM}{R}+C+\gamma\frac{M}{R^2}\cdot mh$$

ИЗБОРОМ $C=\frac{\gamma mM}{R}$ ПОСТИЖЕ СЕ $E_p(h)\simeq m\cdot\gamma\frac{M}{R^2}\cdot h$ ГДЕ ЈЕ

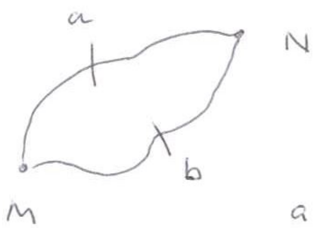
$\gamma\frac{M}{R^2}=g$ ГРАВИТАЦИОНО УБРЗАЊЕ НА ПОВРШИНИ ЗЕМЉЕ.

(*) МАСА КОЈА УЧЕСТВУЈЕ У ЊУТНОВОМ ЗАКОНУ ГРАВИТАЦИЈЕ ТРЕБАЛО БИ ДА СЕ НАЗИВА ГРАВИТАЦИОНА МАСА (m_g), А МАСА КОЈА УЧЕСТВУЈЕ У II ЊУТНОВОМ ЗАКОНУ ИНЕРЦИЈАЛНА МАСА (m_i). НЕМА НИКАКВОГ ТЕОРИЈСКОГ ДОКАЗА (ЗАСАД) ДА СУ ОВЕ ДВЕ МАСЕ ЈЕДНАКЕ; АЛИ ЗАТО ЈЕ ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО УТВРЂЕНО ДА ЈЕ њихова релативна разлика $< 10^{-15}$, па с правом можемо говорити о јединственом појму масе.

Конзервативне силе

Уопштено гледајући постоје силе чији рад при померању од тачке M до тачке N не зависи од пута којим се врши интеграција. Такве силе се називају конзервативне и у њих спадају гравитациона, електростатичка....

За њих важи:



$$ {}_a\int_M^N \vec F\cdot d\vec r = {}_b\int_M^N \vec F\cdot d\vec r = -{}_b\int_M^N \vec F\cdot d\vec r \Rightarrow $$

$$ {}_a\int_M^N \vec F\cdot d\vec r \quad {}_b\int_N^M \vec F\cdot d\vec r = 0 \Rightarrow \quad \oint_c \vec F d\vec r = 0 $$

Кажемо: Њихов интеграл по затвореној путањи једнак је нула. Само за овакве силе може се увести појам (дефиниција) потенцијалне енергије:

$$ \int_M^N \vec F^{ext}\cdot d\vec r = -\int_M^N \vec F^{поља}\cdot d\vec r = (E_{pN}-E_{pM}) $$

где је $\vec F^{ext}$ сила насупрот силе поља $\vec F^{поља}$

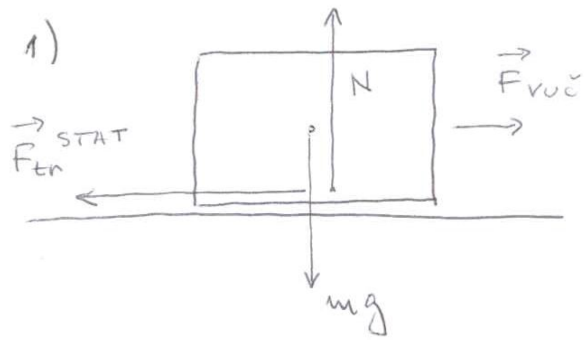
E_{pN}, E_{pM} ће бити једнозначно одређене положајем тачака N, M (наравно до на константу $\underline{C}$). Веза између $\vec F^{поља}$ и E_p биће:

$$ F_x^{поља} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y^{поља} = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z^{поља} = -\frac{\partial E_p}{\partial z}, \quad \text{тј: } \vec F^{поља} = -\mathrm{grad}\, E_p $$

Сила трења: С обзиром да је често присутна у практичним проблемима треба о њој рећи неколико ствари. Постоје разне врсте трења (увек везано за енергетске губитке): у течностима, гасовима и међу чврстим телима. Код ових последњих постоје трење клизања и трење котрљања. Ми ћемо се овде позабавити само трењем клизања између два крута тела.

ТА СИЛА ТРЕЊА ЈЕ ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКОГ КАРАКТЕРА И ФЕНОМЕНОЛОШКИ СЕ ОПИСУЈЕ КОЕФИЦИЈЕНТОМ ТРЕЊА μ КОЈИ ЗАВИСИ ОД ВРСТЕ МАТЕРИЈАЛА ТЕЛА У КОНТАКТУ, КАО И ОД СТЕПЕНА ОБРАЂЕНОСТИ ДОДИРНИХ ПОВРШИНА. ТРЕЊЕ МОЖЕ БИТИ СТАТИЧКО И ДИНАМИЧКО:

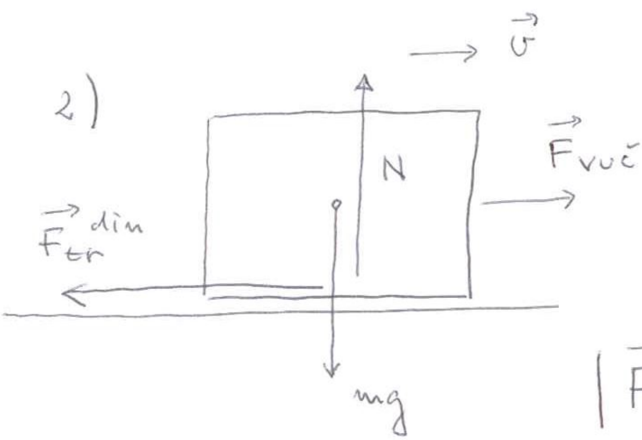
1)



СТАТИЧКА СИЛА ТРЕЊА УВЕК ДЕЛУЈЕ НАСУПРОТ СИЛЕ КОЈА БИ ДА ПОКРЕНЕ ТЕЛО И ЈЕДНАКА ЈОЈ ЈЕ ПО ИНТЕНЗИТЕТУ, ПА СУ ЗАТО ТЕЛА У СТАЊУ РЕЛАТИВНОГ МИРОВАЊА

$$\left|\vec F_{tr}^{STAT}\right| = \left|\vec F_{vuč}\right|$$

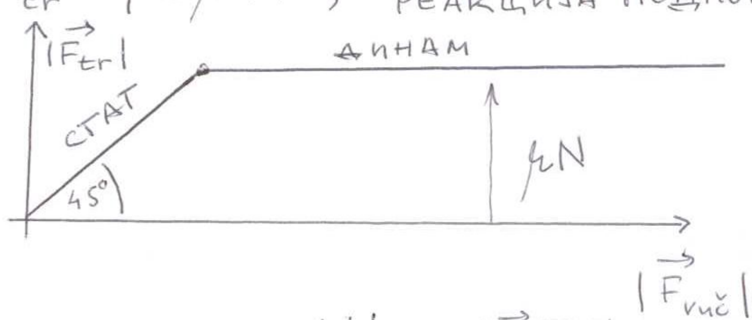
2)



ДИНАМИЧКА СИЛА ТРЕЊА КЛИЗАЊА ДЕЛУЈЕ АКО СУ ТЕЛА У РЕЛАТИВНОМ КРЕТАЊУ И УВЕК ДЕЛУЈЕ НАСУПРОТ ТОГ РЕЛАТИВНОГ КРЕТАЊА:

$$\left|\vec F_{tr}^{din}\right| = \mu N$$, N – НОРМАЛНА РЕАКЦИЈА ПОДЛОГЕ

ОВО СЕ МОЖЕ И ГРАФИЧКИ ПРИКАЗАТИ



ОЧИГЛЕДНО $\vec F_{tr}^{STAT}$ ИМА МОЋ АДАПТАЦИЈЕ СВЕ ДО ВРЕДНОСТИ $\mu N \Rightarrow \left|\vec F_{tr}^{STAT}\right| \le \mu N$

СУДАРИ

СУ ПРОЦЕСИ КОЈИ СЕ ОДВИЈАЈУ У ЈАКО КРАТКОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ (СКОРО ТРЕНУТНО), А С ОБЗИРОМ НА ОГРАНИЧЕНЕ БРЗИНЕ УЧЕСНИКА У ЊЕМУ ПРАКТИЧНО И У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ. ПРИ ТОМЕ СЕ ТЕ БРЗИНЕ МОГУ ПРОМЕНИТИ ТОКОМ СУДАРА. СУДАРИ СЕ МОГУ ПОДЕЛИТИ НА ВИШЕ НАЧИНА:

1) СВИ СУДАРИ СУ ИЛИ ЧЕОНИ ИЛИ СА РАСЕЈАЊЕМ

2) Сви судари могу бити еластични (без губитка енергије) или нееластични (са губитком енергије). Посебан случај нееластичних судара су пластични: код њих се учесници „споје" и после судара се крећу заједничком брзином. Ми ћемо проучавати искључиво бинарне сударе (учествују два објекта).

<u>Чеони судари</u>

Су они код којих све брзине учесника пре судара ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$) и после судара ($\vec{v}_1{}'$, $\vec{v}_2{}'$) леже дуж једног правца. Због краткоће трајања једина релевантна сила која уноси промене је узајамна сила. Како за њу важи III Њутнов закон за сударе ће <u>увек</u> важити <u>закон одржања количине кретања</u>:

$$\boxed{\overbrace{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}^{\text{пре}} = \overbrace{m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}'}^{\text{после}}}$$

С обзиром да су све брзине дуж једног правца можемо посматрати њихове пројекције на тај правац (са усвојеним смером):

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$$

*) v_1, v_2, v_1', v_2' могу бити и позитивне и негативне (сходно томе да ли им се смер поклапа са усвојеним $\underline{x}$) али уз услове:

1) $v_1 > v_2$ ($\underline{m}_1$ лево од $\underline{m}_2$ пре судара)

2) $v_2' > v_1'$ ($\underline{m}_1$ лево од $\underline{m}_2$ после судара)

Поред овог закона важи и закон одржања кинетичке енергије ако је судар еластичан:

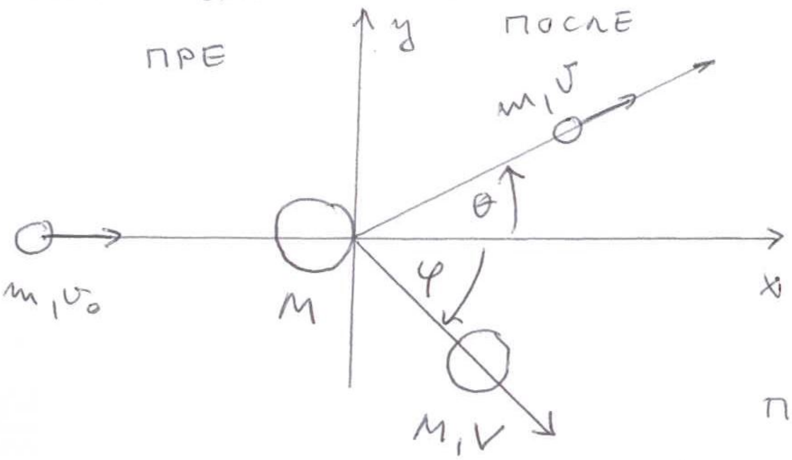
$$\boxed{\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \cancelto{0}{Q}}$$

енергија утрошена у топлоту

Најчешћи задатак је одредити v_1', v_2' и то се постиже решавањем система од две једначине са две непознате поштујући горе наведене услове.

Судари са расејањем

Проучаваћемо само случај кад пројектил масе m и брзине v_0 пре судара налеће на мету масе M која пре судара мирује:



v_0, v, V су сада интензитети брзина пројектила пре, те пројектила и мете после судара респективно

θ – угао расејања пројектила у односу на његов правац кретања пре судара

φ – угао узмака мете у односу на исти правац.

Како је количина кретања вектор, важи њен закон одржања у две компоненте:

$$\boxed{\begin{aligned} x)&\quad m v_0 = m v \cos\theta + M V \cos\varphi \\ y)&\quad 0 = m v \sin\theta - M V \sin\varphi \end{aligned}}$$

Акко је судар еластичан, важиће и закон одржања кинетичке енергије:

$$\boxed{\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}}$$

ТРИ НАВЕДЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СУ ПОСЛЕДИЦА ФИЗИЧКИХ ЗАКОНА КОЈИ ВАЖЕ. ПРИМЕЋУЈЕМО ДА ИМА ТРИ ЈЕДНАЧИНЕ И ЧЕТИРИ НЕПОЗНАТЕ (v, V, θ, φ). ДА БИ СИСТЕМ БИО КАНДИДАТ ДА ИМА ЈЕДНОЗНАЧНО РЕШЕЊЕ У ПРАКТИЧНИМ ПРОБЛЕМИМА МОРА СЕ ЗАДАТИ ЈОШ НЕКА ИНФОРМАЦИЈА.

ДИНАМИКА РОТАЦИЈЕ