Увод у физику флуида

Флуиди је заједнички назив за течности и гасове, али ће се у овом поглављу већа пажња поклонити течностима. Гасовима ћемо се детаљније позабавити кад будемо проучавали науку о топлоти, тачније термодинамику. Физика флуида назива се још и **физика непрекидних средина** зато што чим један делић флуида напусти делић простора његово место одмах заузима други делић флуида. То у ствари значи да се од једне до друге тачке простора може доћи идући искључиво кроз флуид не напуштајући га. Описана чињеница има за последицу да брзина делића флуида не зависи експлицитно само од времена, већ и од положаја у простору на коме се тај делић налази:

$$\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z) \quad \text{у Декартовим координатама}$$

Замислимо линију дуж које је у простору вектор брзине $\vec{v}$ увек тангента на ту линију. Та линија зове се струјна линија – струјница.

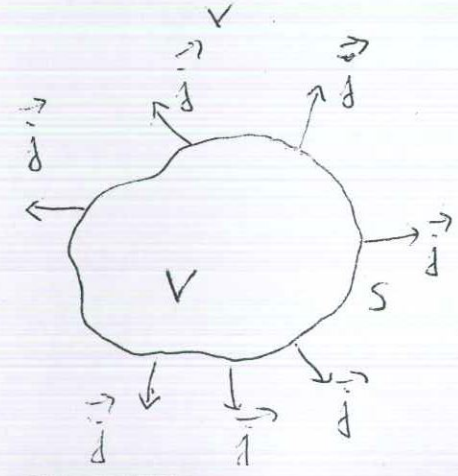
Једначина континуитета

Замислимо макроскопску површ S која затвара запремину V. Претпоставимо да унутар запремине V нема никаквих извора (ни понора) флуида; тада је маса флуида унутар V равна:

$$m = \int_V \rho \, dV$$

Нека је затим густина струје флуида на површи S равна $\vec{j}$ и усмерена у поље. Тада једначина биланса масе (континуитета) у интегралном облику гласи:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \rho \, dV$$

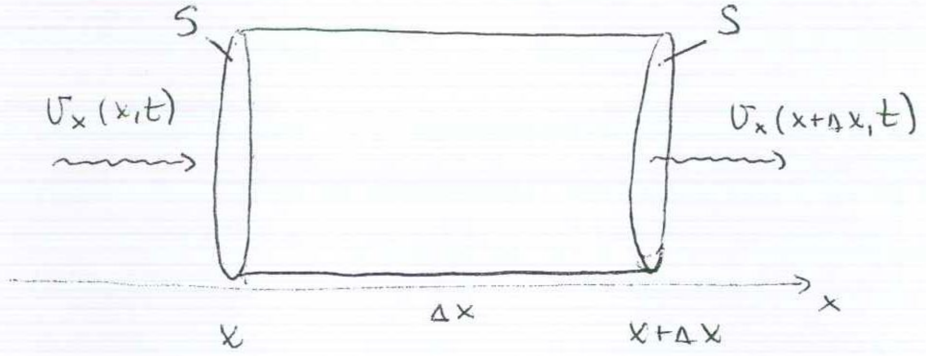


затворена површина

смањење масе флуида унутар V једнако је истеклој маси флуида.

Димензионо је лако уочити да је: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

Покушајмо сада да изведемо одговарајућу једначину у инфинитезималном облику и зато посматрајмо делић простора запремине $\Delta V = S\Delta x$; нека је струјање једнодимензионо дуж x-осе:



1) Маса флуида која уђе у ΔV за време Δt је

$\rho(x,t)\, v_x(x,t)\, S\Delta t$

2) Маса флуида која за исто време изађе је:

$\rho(x+\Delta x,t)\cdot v_x(x+\Delta x,t)\cdot S\Delta t$

3) Маса флуида која остане унутар ΔV за то време је:

$\Delta\rho\cdot\Delta V = \Delta\rho(x,t)\cdot S\Delta x$

Једначина биланса масе флуида даје:

$$\rho(x,t)\cdot v_x(x,t)\cdot\cancel{S}\Delta t - \rho(x+\Delta x,t)\, v_x(x+\Delta x,t)\cdot\cancel{S}\Delta t = \Delta\rho(x,t)\cdot\cancel{S}\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho(x,t)\, v_x(x,t) - \rho(x+\Delta x,t)\cdot v_x(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = \frac{\Delta\rho(x,t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = \frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = 0}$$

што је једначина континуитета за једнодимензионо кретање у диференцијалном облику. Ако је кретање у три димензије једначина постаје:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \quad \text{тј:}$$

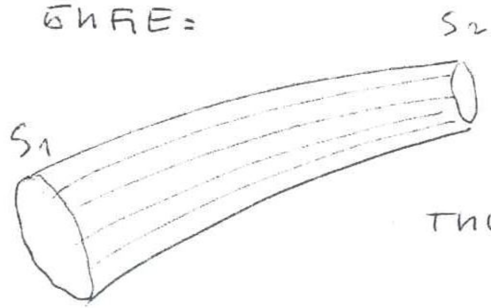
$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0}$$

Врло често се течности сматрају нестишљивима $\Rightarrow \rho = const \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0$$

Ако се ради о макроскопском току флуида кроз неку цев у стационарном случају ($\rho = \rho(x,y,z)$, $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$)

БИЋЕ:



$$\int_{S_1} \rho \vec{v}\, d\vec{S} = \int_{S_2} \rho \vec{v}\, d\vec{S}$$

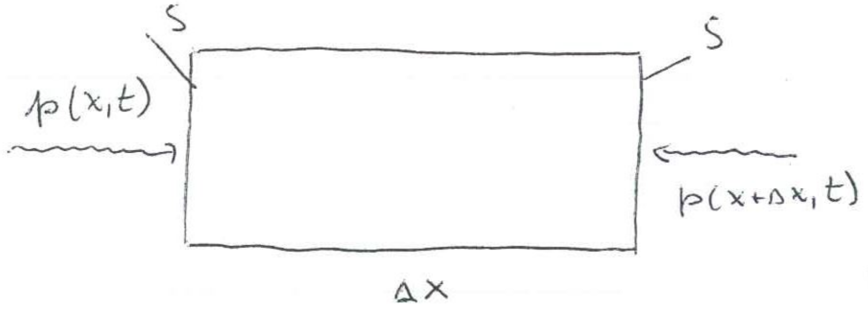
, ПА ЋЕ ЗА НЕСТИШЉИВ ФЛУИД БИТИ:

$$\int_{S_1} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

У СТАЦИОНАРНОМ СТАЊУ СЕ УКУПНА МАСА ФЛУИДА ИЗМЕЂУ ПРЕСЕКА S_1 И S_2 НЕ МЕЊА.

ОЈЛЕРОВА ЈЕДНАЧИНА

ЦИЉ ЈЕ ДА СЕ КРЕИРА НЕКА ЈЕДНАЧИНА КОЈА БИ ОПИСИВАЛА КРЕТАЊЕ ДЕЛИЋА ФЛУИДА, А ОДГОВАРАЛА II НЬУТНОВОМ ЗАКОНУ. ПОСМАТРАЋЕМО КРЕТАЊЕ ТОГ ДЕЛИЋА ФЛУИДА ДУЖ ОДГОВАРАЈУЋЕ СТРУЈНИЦЕ. СМАТРАМО СВЕ СТРУЈНИЦЕ ГЛАТКИМ КРИВИМ ЛИНИЈАМА И МЕЂУ ЊИМА НЕМА НИКАКВЕ ИНТЕРАКЦИЈЕ (НЕ СУДАРАЈУ СЕ, НЕМА МЕЂУСОБНОГ ТРЕЊА----). РАДИ ЈЕДНОСТАВНОСТИ ПОСМАТРА СЕ ЈЕДНОДИМЕНЗИОНО КРЕТАЊЕ:



ВЕЛИЧИНА $p(x,t)$ НАЗИВА СЕ ПРИТИСКОМ И УВЕК ПРЕДСТАВЉА НОРМАЛНУ СИЛУ ПО ЈЕДИНИЦИ УОЧЕНЕ ПОВРШИНЕ. САДА СЕ II НЬУТНОВ ЗАКОН ЗА ДЕЛИЋ ТЕЧНОСТИ МОЖЕ ПИСАТИ:

$$\rho \cdot S \cdot \Delta x \cdot \frac{dv_x}{dt} = p(x,t) \cdot S - p(x+\Delta x,t) \cdot S + \Delta F_x$$

ГДЕ ЈЕ $\Delta\vec{F}$ СПОЉАШЊА СИЛА (НАЈЧЕШЋЕ ГРАВИТАЦИОНА) КОЈА ДЕЛУЈЕ НА ДЕЛИЋ ФЛУИДА ЗАПРЕМИНЕ $\Delta V = S\Delta x$.

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{p(x+\Delta x,t) - p(x,t)}{\Delta x} + \frac{\Delta F_x}{S\Delta x} \Rightarrow$$

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x \; ; \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

У СЛУЧАЈУ ТРОДИМЕНЗИОНОГ КРЕТАЊА БИЋЕ:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z + \vec{f}$$

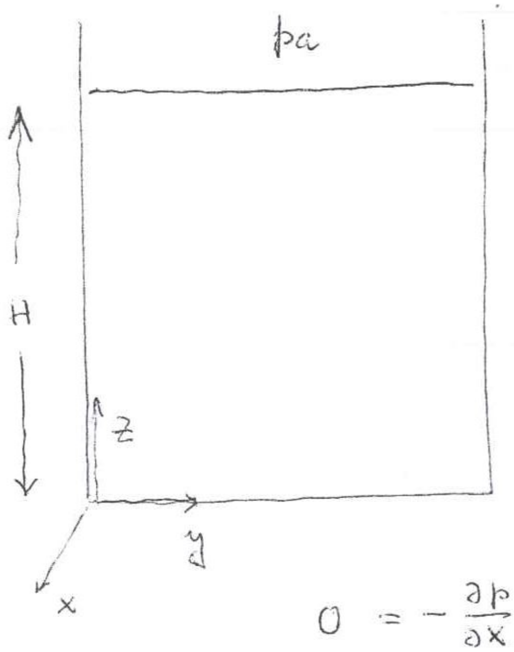
ГЈ:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\mathrm{grad}\,p + \vec{f} \quad , \quad \vec{f} = \rho \vec{g} \; (\text{ГРАВИТАЦИОНА})$$

ВАЉА НАГЛАСИТИ ДА ЗА ПРИТИСАК ВАЖИ ЛАПЛАСОВ ЗАКОН: ПРИТИСАК СЕ У ФЛУИДИМА ПРЕНОСИ РАВНОМЕРНО (ПОДЈЕДНАКО) У СВИМ ПРАВЦИМА. МОЖЕ СЕ РЕЋИ ДА ЈЕ ПРИТИСАК ВЕЛИЧИНА КОЈА ОПИСУЈЕ УТИЦАЈ ОСТАТКА ФЛУИДА НА ЊЕГОВ ИЗАБРАНИ ДЕЛИЋ У ОДСУСТВУ СИЛЕ УНУТРАШЊЕГ ТРЕЊА (ВИСКОЗНОСТИ). КАД ЈЕ У ФЛУИДУ ПРИСУТНА ВИСКОЗНОСТ ОЈЛЕРОВА ЈЕДНАЧИНА МОЖЕ СЕ ДОПУНИТИ ОДГОВАРАЈУЋИМ ЧЛАНОМ, АЛИ ЈЕ ТО ВАН ГРАНИЦА ОПШТЕГ КУРСА ФИЗИКЕ.

СТАТИКА ФЛУИДА

1) ИЗВОЂЕЊЕ ИЗРАЗА ЗА ГРАВИТАЦИОНИ ПРИТИСАК



ПОСМАТРАЈМО ТЕЧНОСТ КОЈА МИРУЈЕ У ШИРОКОМ СУДУ И НА КОЈУ ДЕЛУЈЕ САМО ГРАВИТАЦИОНА СИЛА ЧИЈА ЈЕ ЗАПРЕМИНСКА ГУСТИНА:

$$\vec{f} = \rho\vec{g} = -\rho g \vec{e}_z$$

Пошто флуид мирује мора бити: $\vec{v} = 0 \Rightarrow d\vec{v}/dt = 0$ ПА ОЈЛЕРОВА ЈЕДНАЧИНА ПОСТАЈЕ:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z + \rho g \cdot (-\vec{e}_z) \quad \text{или:}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \; , \; \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \; , \; \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$ ПО КОМПОНЕНТАМА. ИЗ ПРВЕ ДВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СЛЕДИ ДА p НЕ ЗАВИСИ ОД $x, y \Rightarrow p = p(z)$, А ИЗ ТРЕЋЕ:

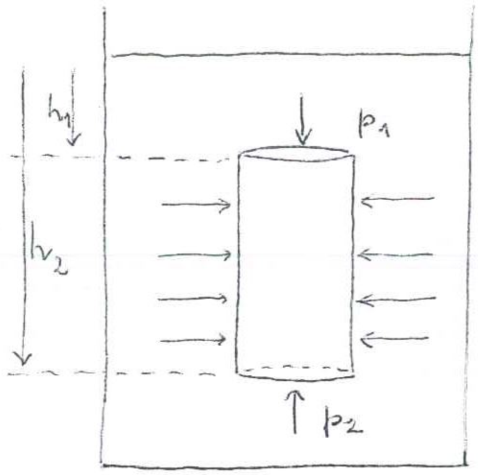
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p(z) = -\rho g z + C$$ КОНСТАНТА C НАЛАЗИ СЕ ИЗ ГРАНИЧНОГ УСЛОВА: $p(H) = p_a \Rightarrow -\rho g H + C = p_a \Rightarrow C = p_a + \rho g H$

САДА ЈЕ ПРИТИСАК $p(z) = p_a + \rho g H - \rho g z \Rightarrow$

$$\boxed{p(z) = p_a + \rho g (H - z)}$$

ОВАЈ ИЗРАЗ ПОЗНАТ ЈЕ ОДРАНИЈЕ. НАИМЕ, ВЕЛИЧИНА $(H-z)$ ЈЕ ТАЧНО ВИСИНА СТУБА ТЕЧНОСТИ ИЗНАД ТАЧКЕ ОЗНАЧЕНЕ КООРДИНАТОМ z. ЈАСНО ЈЕ ТАКОЂЕ ДА ПРИТИСАК ЗАВИСИ САМО ОД ВИСИНЕ ТОГ СТУБА, АЛИ НЕ И ОД ОБЛИКА СУДА.

АРХИМЕДОВ ЗАКОН



ПОСМАТРАЈМО ТЕЛО ПОТПУНО УРОЊЕНО У НЕКИ ФЛУИД. РАДИ ЈЕДНОСТАВНОСТИ НЕКА ТО ТЕЛО ИМА ОБЛИК ВЕРТИКАЛНО ПОСТАВЉЕНОГ ЦИЛИНДРА; БОЧНЕ СИЛЕ НАСТАЛЕ УСЛЕД ПРИТИСКА ДЕЛУЈУ НА ОМОТАЧ И УЗАЈАМНО СЕ ПОТИРУ. СИЛЕ КОЈЕ СЕ НЕЋЕ ПОТИРАТИ СУ СИЛЕ ПРИТИСКА НА ГОРЊИ И ДОЊИ БАЗИС; РЕЗУЛТУЈУЋА СИЛА КОЈОМ ФЛУИД ДЕЛУЈЕ НА ЦИЛИНДАР УСМЕРЕНА ЈЕ НАВИШЕ И ИМА ИНТЕНЗИТЕТ:

$$\uparrow \quad F_p = (p_2 - p_1) S_B = \left[(p_a + \rho g h_2) - (p_a + \rho g h_1) \right] \cdot S \Rightarrow$$

$$F_p = g \rho S_B (h_2 - h_1) = \rho g V$$

ГДЕ ЈЕ V ЗАПРЕМИНА НАШЕГ ЦИЛИНДРА. АКО НИЈЕ ЧИТАВ ЦИЛИНДАР ПОТОПЉЕН У ТЕЧНОСТ ГОРЊИ ИЗРАЗ ТРЕБА МОДИФИКОВАТИ (ЛАКО СЕ ЗАКЉУЧИ КАКО):

$$\boxed{F_p = \rho g V_{pot}}$$

ГДЕ ЈЕ V_{pot} ЗАПРЕМИНА ПОТОПЉЕНОГ ДЕЛА ЦИЛИНДРА. БЕЗ ОБЗИРА ШТО ЈЕ ЗБОГ МАТЕМАТИЧКЕ ЈЕДНОСТАВНОСТИ ИЗВЕДЕНА НА ОВАЈ НАЧИН ГОРЊА ФОРМУЛА ЗА F_p ИМА УНИВЕРЗАЛНИ КАРАКТЕР, ТЈ. ВАЖИ ЗА ТЕЛО ПРОИЗВОЉНОГ ОБЛИКА. САДА СЕ МОЖЕ ФОРМУЛИСАТИ:

<u>АРХИМЕДОВ ЗАКОН</u>: НА СВАКО ТЕЛО ПОТОПЉЕНО У НЕКИ ФЛУИД (У ГРАВИТАЦИОНОМ ПОЉУ ЗЕМЉЕ) ДЕЛУЈЕ СИЛА ПОТИСКА ВЕРТИКАЛНО НАВИШЕ:

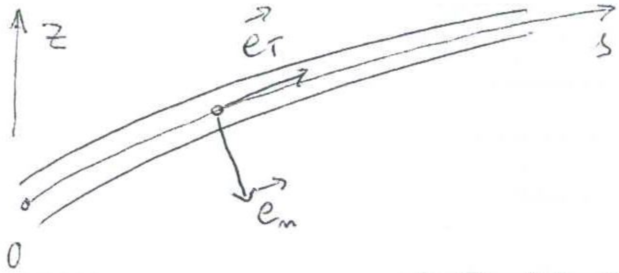
$$\boxed{F_p = \rho g V_{pot}}$$

ρ - густина флуида

V_{pot} - запремина потопљеног дела тела

Нападна тачка силе потиска налази се у центру масе потопљеног дела тела урођеног у флуид.

Бернулијева једначина



Посматрајмо делић флуида који се креће дуж изабране струјнице и обележимо њен почетак (0). Растојање дуж струјнице од те тачке до произвољне тачке струјнице назваћемо координатом s (како струјница може бит крива линија и координата s је криволинијска).

Ојлерова једначина записана за компоненту дуж струјнице је:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}\right) = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g\frac{dz}{ds} \quad ; \text{ јер је } \vec{e}_\tau \cdot \vec{e}_z = \frac{dz}{ds}$$

Кад се обе стране једначине помноже са ds биће:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}\cdot ds + \rho v\frac{\partial v}{\partial s}\cdot ds = -\frac{\partial p}{\partial s}\cdot ds - \rho g\,dz$$

У стационарном случају је $v = v(s)$, $p = p(s)$ (а не $v = v(s,t)$ и $p = p(s,t)$) и брзина и притисак не зависе експлицитно од времена, већ само од положаја дуж струјнице. Тада се трајекторија делића флуида поклапа са одговарајућом струјницом и биће:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial s} \Rightarrow \frac{dv}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial s} \Rightarrow \frac{dp}{ds}$$

па горња једначина постаје:

$$\rho v\frac{dv}{ds}\cdot ds = -\frac{dp}{ds}\cdot ds - \rho g\,dz$$

односно

$\rho v\,dv = -dp - \rho g z$ што интеграљењем постаје:

$$\boxed{\rho\frac{v^2}{2} + p + \rho g z = Const}$$

Ако посматрамо два произвољно одабрана пресека биће

$$\boxed{\rho\frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2}$$

где је:

$\rho v^2/2$ – динамички притисак

p – притисак у флуиду

$\rho g z$ – гравитациони притисак

→ има облик и улогу закона о одржању укупне механичке енергије

За стационаран ток флуида збир ове три величине не мења се дуж струјнице. *Примери:* Вентуријева цев, Питоова цев, Торичелијева теорема. Наравно све ово важи *искључиво* у случају *невискозног флуида*, тј. кад се унутрашње трење занемари. Такав флуид називамо идеалним

Вискозност

Идеални флуид је апстракција (мада корисна). Реалност је флуид код кога је у мањој или већој мери присутна вискозност (унутрашње трење) која резултира енергетским губицима. Пре свега постоје два типа кретања вискозног флуида:

1) *Ламинарно кретање* флуид се креће у слојевима који између себе делују искључиво силом трења (која је тангента на слојеве). Ако посматрамо струјнице оне се одржавају и глатке су линије. Честице флуида из једне струјнице (па и слоја) у другу не прелазе, тј. оне се не мешају и не сударају. Такође нема ни њиховог самопресецања. Ламинарни ток је *стационаран*.

2) <u>ТУРБУЛЕНТНО КРЕТАЊЕ</u> – при порасту брзине или попречних димензија тока, његов карактер се битно мења. Ако би на почетку уочили струјницу она би се врло брзо низ ток деформисала и флуид из те струјнице расуо би се по целом пресеку. Такво кретање називамо турбулентним и оно је <u>нестационарно</u>. Зашто настаје оваква интеракција струјница која доводи до турбуленције није још у потпуности разјашњено, али је утврђено да она настаје кад <u>бездимензиона</u> величина звана <u>Рејнолдсов број</u> премаши неку критичну вредност:

$$\boxed{Re = \frac{\rho v D}{\eta}}$$

ρ – густина флуида

v – брзина струјања флуида

η – коефицијент вискозности

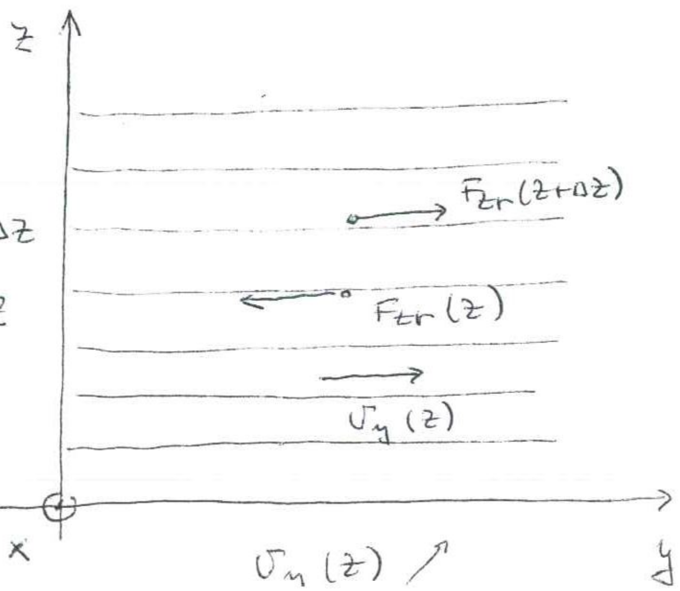
D – пречник цеви (или нека друга карактеристична попречна димензија). За струјање воде у цеви:

$Re \lesssim 2000$ ламинарни ток

$Re \gtrsim 2200$ турбулентни ток

Само проучавање турбулентног кретања толико је сложено да се њиме у оквиру овог курса нећемо бавити.

<u>Њутнов закон вискозности</u>



Посматрајмо флуид који ламинарно струји дуж y-осе. Нека је флуид нестишљив и нека је ток по x-оси јако широк; тада је:

$$\vec{v} = v_y(z)\,\vec{e}_y$$

јер је ток стационаран. Емпиријски је утврђено да

ИЗМЕЂУ СЛОЈЕВА ПОСТОЈИ СИЛА ТРЕЊА $\vec{F}_{tr} = F_{tr} \cdot \vec{e}_y$

ЧИЈИ ЈЕ ИНТЕНЗИТЕТ:

$$\left|\vec{F}_{tr}\right| = \eta \cdot S \cdot \left|\frac{dv_y}{dz}\right|$$

η – КОЕФИЦИЈЕНТ ВИСКОЗНОСТИ

S – ДОДИРНА ПОВРШИНА СЛОЈЕВА

$\frac{dv_y}{dz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$ – ГРАДИЈЕНТ БРЗИНЕ; ПОКАЗУЈЕ КОЈИМ ТЕМПОМ СЕ МЕЊА БРЗИНА ОД СЛОЈА ДО СЛОЈА.

СМЕР СИЛЕ $\vec{F}_{tr}$ ИЗМЕЂУ ДВА СЛОЈА ЈЕ ТАКАВ ДА ОНА УВЕК КОЧИ БРЖИ СЛОЈ, А УБРЗАВА (ПОВЛАЧИ ЗА СОБОМ) СПОРИЈИ. ПОКУШАЈМО ДА НА ОВАЈ НАЧИН ОДРЕДИМО ПРОФИЛ БРЗИНЕ $v_y(z)$ У ШИРОКОЈ РЕЦИ ДУБИНЕ D $(0 \leq z \leq D)$. КАКО ЈЕ ТОК СТАЦИОНАРАН БИЋЕ:

$$\eta S F_{tr}(z+\Delta z) - \eta S F_{tr}(z) = 0$$

ДРУГИХ СИЛА НЕМА ИЛИ СЕ ЗАНЕМАРУЈУ

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{dv_y}{dz}\right|_{z+\Delta z} = \left.\frac{dv_y}{dz}\right|_{z} \; \forall z \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_y}{dz} = C_1 \quad \Rightarrow \quad v_y(z) = C_1 z + C_2$$

НАЈЧЕШЋЕ ЈЕ БРЗИНА ТОКА ПРИ ДНУ ЈЕДНАКА НУЛИ $(v_y(0) \approx 0)$

$\Rightarrow C_2 = 0$ ПА ПРОФИЛ БРЗИНЕ ПОСТАЈЕ:

$$v_y(z) = C_1 \cdot z \quad \text{(ЛИНЕАРНИ ПРОФИЛ)}$$

(ДА СЕ ОДРЕДИ C_1 МОРА СЕ ЗАДАТИ ЈОШ НЕКА ИНФОРМАЦИЈА; НПР. ПРОТОК ИЛИ БРЗИНА НА ПОВРШИНИ $v_y(D)$).

КОЕФИЦИЈЕНТ ВИСКОЗНОСТИ ПРЕВАСХОДНО ЗАВИСИ ОД ДВЕ СТВАРИ: ВРСТЕ ФЛУИДА И ТЕМПЕРАТУРЕ. УТВРЂЕНО ЈЕ:

$\eta \searrow (T \nearrow)$ ТЕЧНОСТИ

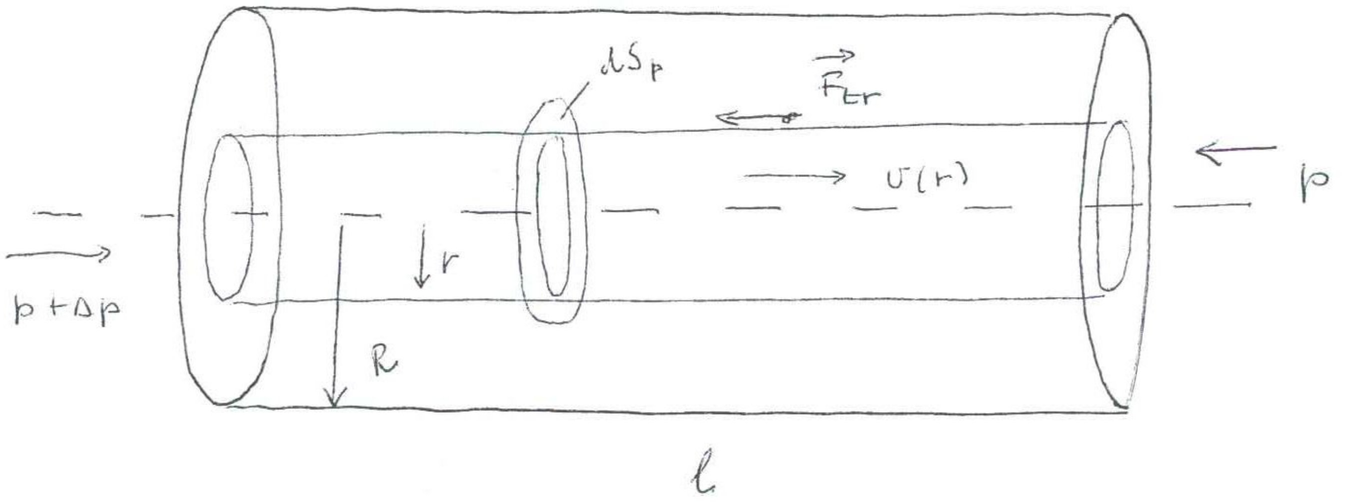
$\eta \nearrow (T \nearrow)$ ГАСОВИ

УКАЗУЈЕ НА ПОТПУНО РАЗЛИЧИТ МЕХАНИЗАМ НАСТАНКА КОД ПРВИХ И ДРУГИХ

ПОАЗЈЕЕВ ЗАКОН

ОДНОСИ СЕ НА ЛАМИНАРНО КРЕТАЊЕ ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА КРОЗ

ДУГАЧКУ ЦЕВ ПОЛУПРЕЧНИКА R ПОД ДЕЈСТВОМ РАЗЛИКЕ ПРИТИСАКА Δp:



ПОШТО ЈЕ ТОК СТАЦИОНАРАН ПОКРЕТАЧКА СИЛА $(\Delta p \cdot r^2 \pi)$ КОЈА ДЕЛУЈЕ НА УОЧЕНИ ЦИЛИНДАР ТЕЧНОСТИ ПРОИЗВОЉНОГ ПОЛУПРЕЧНИКА r МОРА БИТИ УРАВНОТЕЖЕНА СИЛОМ ТРЕЊА (КОЈА ДЕЛУЈЕ ПО ЊЕГОВОМ ОМОТАЧУ):

$$\Delta p \cdot r^2 \pi = -\eta \cdot 2\pi r l \cdot \frac{dv}{dr}$$ ЈЕР ЈЕ $\frac{dv}{dr} < 0$, ПА ЈЕ:

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r \Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} \cdot r^2 + C$$

$C = \frac{\Delta p}{4\eta l} \cdot R^2$ ЈЕР МОРА БИТИ ЗАДОВОЉЕН УСЛОВ $v(R) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)}$$ ПАРАБОЛОИДНИ ПРОФИЛ БРЗИНЕ

ПА ЈЕ У ОСИ ЦЕВИ: $v(0) = v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l}$

ЗАНИМЉИВО ЈЕ ИЗРАЧУНАТИ ЗАПРЕМИНСКИ ПРОТОК КРОЗ ЦЕВ И СРЕДЊУ БРЗИНУ ТОКА.

$$dQ = v(r) \cdot dS = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \cdot 2\pi r\,dr$$ ИНФИНИТЕЗИМАЛНА ПОВРШИНА ПРОТЕНА dS_p (СА СЛИКЕ)

$$Q = \frac{\Delta p}{4\eta l}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) 2\pi r\,dr = \frac{\Delta p \cdot \pi}{2\eta l}\int_0^R \left(R^2 - r^2\right) \cdot r\,dr =$$

$$= \frac{\Delta p \pi}{2\eta l}\left(R^2\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^R = \frac{\Delta p \pi}{2\eta l}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = \frac{\Delta p \cdot \pi R^4}{8\eta l}}$$

ЗАПРЕМИНСКИ ПРОТОК ЈЕ:

- СРАЗМЕРАН ПАДУ ПРИТИСКА ПО ЈЕДИНИЦИ ДУЖИНЕ ТОКА
- СРАЗМЕРАН R^4 !!!
- ОБРНУТО СРАЗМЕРАН η; $\Rightarrow$ ВЕЋА ВИСКОЗНОСТ $\Rightarrow$ ТЕЖЕ ТЕЧЕ

$$v_{sr} = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}}{R^2\pi} = \frac{\Delta p R^2}{8\eta l} = v_0/2 \Rightarrow$$

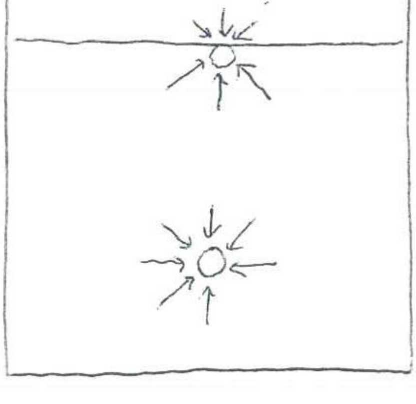
КАД БИ ФЛУИД ПО ЦЕЛОМ СВОМ ПРЕСЕКУ ТЕКАО ЈЕДНАКОМ БРЗИНОМ $v_0/2$ ОСТВАРИО БИ ИСТИ ЗАПРЕМИНСКИ ПРОТОК КАО У ПРОУЧАВАНОМ СЛУЧАЈУ.

Стоксов закон АКО СЕ КУГЛИЦА МАЛОГ ПОЛУПРЕЧНИКА r КРЕЋЕ НЕ ИСУВИШЕ ВЕЛИКОМ БРЗИНОМ v КРОЗ ФЛУИД, ТАЈ ФЛУИД ЋЕ ЈЕ УСПОРАВАТИ ВИСКОЗНОМ СИЛОМ ОТПОРА:

$$\boxed{F_{tr} = 6\pi\eta r v}$$

ИСТОМ СИЛОМ ЋЕ ФЛУИД КОЈИ ОПСТРУЈАВА КУГЛИЦУ (МИРУЈУЋУ) БРЗИНОМ v (ДАЛЕКО ОД ЊЕ) ВУЋИ ЗА СОБОМ КУГЛИЦУ. КРЕТАЊЕ ФЛУИДА ОСТАЈЕ ЛАМИНАРНО (СТАЦИОНАРНО).

Површински напон



У ОСНОВИ ПОЈАВЕ ПОВРШИНСКОГ НАПОНА ЛЕЖИ ЧИЊЕНИЦА ДА СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ ИЗМЕЂУ ИСТОРОДНИХ МОЛЕКУЛА НИЈЕ ИСТА КАО ОНА ИЗМЕЂУ РАЗНОРОДНИХ МОЛЕКУЛА. НА МОЛЕКУЛ ТЕЧНОСТИ КОЈИ ЈЕ ДАЛЕКО ОД РАЗДВОЈНЕ ПОВРШИ ТЕЧНОСТ/ГАС (СЛИКА) РЕЗУЛТУЈУЋА СИЛА РАВНА ЈЕ НУЛИ ЈЕР ЈЕ ОН ИЗОТРОПНО ОКРУЖЕН ИСТОРОДНИМ МОЛЕКУЛИМА. СА МОЛЕКУ-

лима близу раздвојне површине то није случај и резул-
тујућа сила није нула $\Rightarrow$ настаје сила површинског напона.

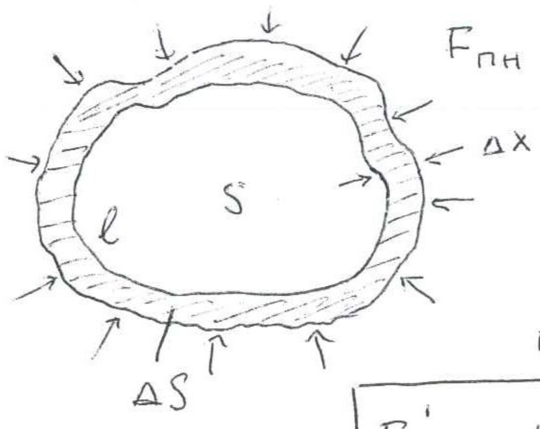
<u>Емпиријски</u> је утврђено следеће:

1) да би се повећала слободна површина течности мора се извршити неки рад (насупрот силе површинског напона)
2) Препуштена себи слободна површина течности тежи да се смањује (најчешће до минималне вредности одређене неком другом силом која се супротставља сили површинског напона).

У оквиру феноменолошког приступа може се рећи да слободна површина течности има енергију сразмерну величини те површине:

$\boxed{E_{пн} = \gamma \cdot S}$ γ – коефицијент површинског напона

Нека је слободна површина ограничена неком контуром и нека се њено смањење одвија (спонтано) дуж целе те контуре, сила површинског напона биће једнака:



$\gamma \cdot \Delta S = \gamma l \Delta x = F_{пн} \cdot \Delta x \Rightarrow$

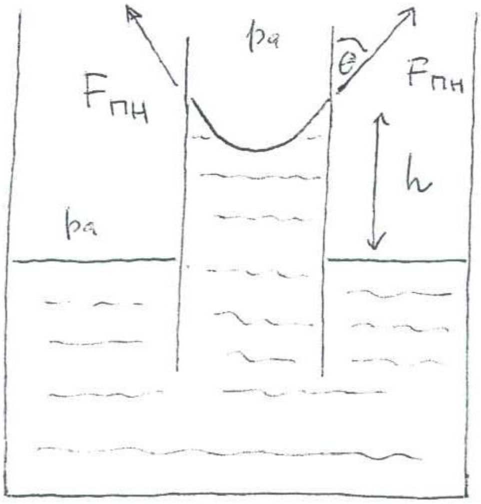
$\boxed{F_{пн} = \gamma l}$ и делује дуж читаве контуре обима l

Ако се може померати само део те контуре дужине l' онда је:

$\boxed{F'_{пн} = \gamma l'}$ и делује само на тај део контуре. У оба случаја $F_{пн}$ је <u>тангента</u> на слободну површ, а нормална на контуру (или њен део који се може померати) у тачки где делује.

<u>Вода у капилари</u> (цеви пречника ~1mm)

Посматрајмо капилару урођену у широки суд са водом. Сила између молекула стакло-вода већа је од силе између молекула вода-вода. Зато се вода пење у капилару, А површина воде је удубљена одозго. Угао θ назива се угао квашења (вода кваси зидове суда), а сила површинског напона уравнотежена је тежином издигнутог стуба течности:

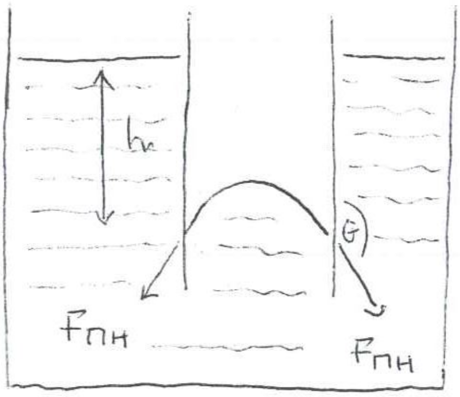


$$F_{пн} = \rho r^2 \pi h \cdot g \Rightarrow \gamma \cdot 2\pi r \cos\theta = \rho r^2 \pi h g \Rightarrow$$

$\boxed{\rho g h = \frac{2\gamma}{r}\cos\theta}$, величина $p_L = \frac{2\gamma}{r}\cos\theta$ назива се Лапласов притисак. Често се сматра да је квашење потпуно ($\theta = 0$, $\cos\theta = 1$). Ако слободна површина није сферна већ неког другог облика Лапласов притисак постаје:

$\boxed{p_L = \gamma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}$ где су r_1, r_2 највећи и најмањи полупречник кривине респективно.

Жива у капилари:



Сила између молекула стакло-жива слабија је од силе између молекула жива-жива. Зато се ниво живе у капилари спушта у односу на суд, а жива не кваси зидове суда и њена слободна површина испупчена је на горе. Сви остали изрази исти су као пре.

Занимљиво:

1) вода

Вода се разлива по подлози; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

2) жива

Жива се не разлива $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Кад год се има посла са силом површинског напона (нпр мехур од сапунице) треба добро обратити пажњу да се коректно дефинише слободна површина, као и линија дуж које се она може мењати (тј. дуж које делује $F_{пн}$)