$$\boxed{\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{MV^2}{2}}$$

ТРИ НАВЕДЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СУ ПОСЛЕДИЦА ФИЗИЧКИХ ЗАКОНА КОЈИ ВАЖЕ. ПРИМЕЋУЈЕМО ДА ИМА ТРИ ЈЕДНАЧИНЕ И ЧЕТИРИ НЕПОЗНАТЕ (v, V, θ, φ). ДА БИ СИСТЕМ БИО КАНДИДАТ ДА ИМА ЈЕДНОЗНАЧНО РЕШЕЊЕ У ПРАКТИЧНИМ ПРОБЛЕМИМА МОРА СЕ ЗАДАТИ ЈОШ НЕКА ИНФОРМАЦИЈА.

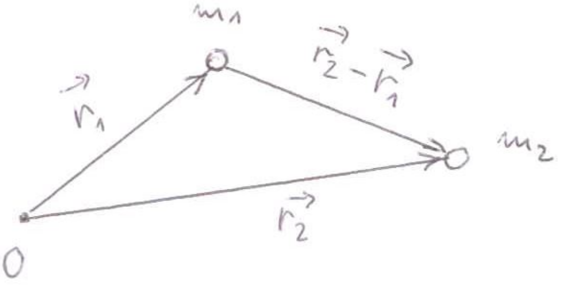
ДИНАМИКА РОТАЦИЈЕ

(ДИНАМИКА СИСТЕМА МАТЕРИЈАЛНИХ ТАЧАКА)

ЗА ПОЧЕТАК ПРЕТПОСТАВИЋЕМО ДА ЈЕ У ПИТАЊУ РОТАЦИЈА ОКО ФИКСНЕ ОСЕ. НА ПРИМЕР ЗАТВАРАЊЕ И ОТВАРАЊЕ ВРАТА МОЖЕ СЕ ОПИСАТИ КАО РОТАЦИЈА ОСЕ КОЈА ПРОЛАЗИ КРОЗ ЊИХОВЕ ШАРКЕ. ПОТРЕБАН УСЛОВ ДА СЕ ТО ОСТВАРИ ЈЕ ПОСТОЈАЊЕ НЕКЕ СИЛЕ КОЈА ДЕЛУЈЕ НА ВРАТА. ПОТРЕБАН, АЛИ НЕ И ДОВОЉАН. ДОВОЉАН УСЛОВ БИО БИ ДА ВЕКТОР ТЕ СИЛЕ НЕ СМЕ ПРОЛАЗИТИ КРОЗ ОСУ РОТАЦИЈЕ, ТЈ. ДА ВЕКТОР ТЕ СИЛЕ ИМА НЕНУЛТУ КОМПОНЕНТУ НОРМАЛНУ НА РАВАН ВРАТА. УОЧАВА СЕ ЗАТИМ ШТО ЈЕ НАПАДНА ТАЧКА ТЕ СИЛЕ ДАЉЕ ОД ОСЕ РОТАЦИЈЕ, ИСТИ ЕФЕКАТ МОЖЕ СЕ ПОСТИЋИ СИЛОМ МАЊЕГ ИНТЕНЗИТЕТА. ТО НАС НАВОДИ НА ЗАКЉУЧАК ДА ЈЕ ЗА ОСТВАРИВАЊЕ РОТАЦИЈЕ БИТАН ПРОИЗВОД РАСТОЈАЊА ОСЕ РОТАЦИЈЕ ОД НАПАДНЕ ТАЧКЕ СИЛЕ (КРАК) И КОМПОНЕНТЕ СИЛЕ НОРМАЛНЕ НА ТАЈ КРАК. ДАКЛЕ ОДГОВАРАЈУЋУ ФИЗИЧКУ ВЕЛИЧИНУ ТРЕБА СЛЕВА ВЕКТОРСКИ ПОМНОЖИТИ НЕКИМ РАСТОЈАЊЕМ И ТАКО КРЕИРАТИ ЊЕН МОМЕНАТ. ПОСМАТРАЈМО ЗАТО II ЊУТНОВ ЗАКОН ЗА ДВЕ МТ И ПОМНОЖИМО СВАКУ ЈЕДНАЧИНУ ЊЕНИМ ВЕКТОРОМ ПОЛОЖАЈА У ОДНОСУ НА ИЗАБРАНУ ТАЧКУ (ПОЛ):

$$\vec{r}_1 \times \Big/ \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1^{\,ext} + \vec{F}_{21}$$

$$\vec{r}_2 \times \Big/ \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2^{\,ext} + \vec{F}_{12}$$



КАД ИХ САБЕРЕМО ДОБИЈА СЕ:

$$\vec{r}_1 \times \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{ext} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}$$

ПОСЛЕДЊИ ДЕО ЈЕ: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} = 0$

$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$ (III ЊУТНОВ ЗАКОН) КОЛИНЕАРНИ

СА ДРУГЕ СТРАНЕ ЈЕ $\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ $i = 1, 2$

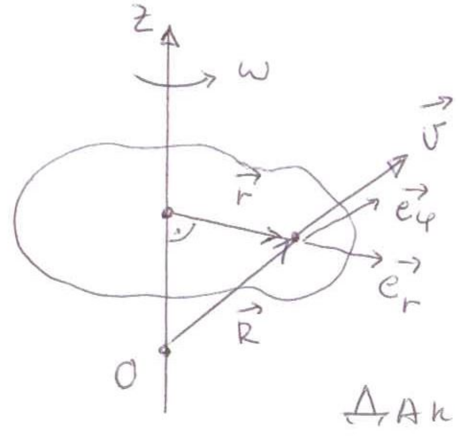
ПА ЈЕ $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{ext}$ ИЛИ КРАЋЕ:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}^{ext}}$$

II ЊУТНОВ ЗАКОН ЗА РОТАЦИЈУ У ОПШТЕМ ОБЛИКУ КАЖЕ ДА ЈЕ ПРОМЕНА МОМЕНТА? КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА У ЈЕДИНИЦИ ВРЕМЕНА ЈЕДНАКА УКУПНОМ МОМЕНТУ СПОЉАШЊИХ СИЛА

(УНУТРАШЊЕ СИЛЕ НЕМАЈУ УТИЦАЈА СВЕ ДОК ВАЖИ III ЊУТНОВ ЗАКОН)

АКО СЕ ОВО ПРИМЕНИ НА РОТАЦИЈУ ОКО ФИКСНЕ ОСЕ (z-ОСЕ) МОЖЕ СЕ ПОКАЗАТИ СЛЕДЕЋЕ:



$$d\vec{L} = dm\, \vec{R} \times \vec{v} = dm\,(z\vec{e}_z + r\vec{e}_r) \times \omega r \vec{e}_\varphi =$$

$$= -dm \cdot z r \vec{e}_r + dm\, r^2 \omega \vec{e}_z \quad \Rightarrow$$

$$\vec{L} = -\omega \vec{e}_r \int dm \cdot z r + \omega \vec{e}_z \int dm\, r^2$$

ДАКЛЕ ВЕКТОР $\vec{L}$ НИЈЕ КОЛИНЕАРАН СА $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$.

ОН ЋЕ ТО БИТИ САМО АКО ЈЕ ПРВИ САБИРАК ЈЕДНАК 0, ТЈ. ТЕЛО ЈЕ СИМЕТРИЧНО У ОДНОСУ НА z-ОСУ. АЛИ ЋЕ ЗАТО УВЕК ВАЖИТИ

$L_z = I \omega_z$ ГДЕ ЈЕ I МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА У ОДНОСУ НА z-ОСУ. ЗАТО ЋЕ БИТИ:

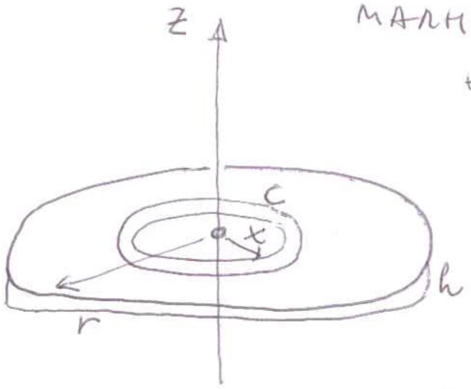
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \mathcal{M}_z^{ext}$$ ГДЕ ЈЕ $I = \int dm\, r^2$

r - РАСТОЈАЊЕ ДАТЕ МТ ОД z-ОСЕ, ЗА ЈЕДНУ МТ БИЋЕ

$I_{MT} = m r^2$, А ЗА СИСТЕМ $I = \sum m_i r_i^2$

ТЈ. МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ СИСТЕМА МТ ЗА НЕКУ ОСУ ЈЕДНАК ЈЕ СУМИ МОМЕНАТА ИНЕРЦИЈЕ СВИХ МТ СИСТЕМА ПОНАОСОБ. ОДАВДЕ ЈЕ ЈАСНО КАКО БИ СЕ ОН РАЧУНАО ЗА ТЕЛА ОДРЕЂЕНОГ ОБЛИКА КАО И ДА ЗАВИСИ ОД ПОЛОЖАЈА ОСЕ РОТАЦИЈЕ.

<u>ПРИМЕР:</u> ПУН ХОМОГЕН ДИСК, ОСА РОТАЦИЈЕ КРОЗ C И НОРМАЛНА НА РАВАН ДИСКА: ИЗДЕЛИМ ДИСК НА ИНФИНИТЕЗИМАЛНЕ ДЕЛИЋЕ ЧИЈЕ СУ СВЕ МТ ПОДЈЕДНАКО УДАЉЕНЕ ОД ОСЕ РОТАЦИЈЕ (ТО СУ ПРСТЕНОВИ ДЕБЉИНЕ dx):

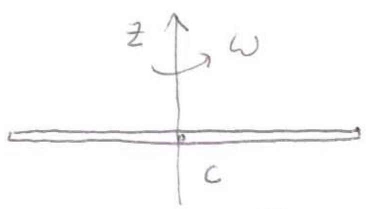


$$dm = \rho \cdot 2\pi x\,dx \cdot h \quad , \quad dI = dm \cdot x^2$$

$$m = \rho h \cdot 2\pi \int_0^r x\,dx = \rho h r^2 \pi$$

$$I = \rho h 2\pi \int_0^r x^2 \cdot x\,dx = \frac{\rho h \pi r^4}{2} \Rightarrow I = I_z = \frac{mr^2}{2}$$

НА СЛИЧАН НАЧИН СЕ ДОБИЈА:



1) ХОМОГЕНИ ШТАП, ОСА РОТАЦИЈЕ КРОЗ ЦЕНТАР И НОРМАЛНА НА ШТАП: $I_z = \frac{ml^2}{12}$

2) ХОМОГЕНА КУГЛА КРОЗ ЦЕНТАР:

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \qquad R - \text{ПОЛУПРЕЧНИК}$$

КАД ЈЕ У ПИТАЊУ РОТАЦИЈА ОКО ФИКСНЕ ОСЕ ($\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$) МОЖЕ СЕ РЕЋИ СЛЕДЕЋЕ:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \mathcal{M}_z^{ext} \Rightarrow \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_z^{ext}$$

1) АКО ЈЕ $dI/dt = 0 \Rightarrow I\alpha = \mathcal{M}_z^{ext}$ ПОСЕБНИ ОБЛИК II ЊУТНОВОГ ЗАКОНА ЗА РОТАЦИЈУ

2) АКО ЈЕ $\mathcal{M}_z^{ext} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} = 0$ МОГУЋЕ ЈЕ УБРЗАВАЊЕ И УСПОРАВАЊЕ РОТАЦИЈЕ И БЕЗ МОМЕНТА СПОЉАШЊИХ СИЛА, АКО СЕ МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ МЕЊА. ПРИМЕР ЈЕ КЛИЗАЧИЦА КАД ПРАВИ ПИРУЕТУ.

ЦЕНТАР МАСЕ СИСТЕМА Ако је положај сваке МТ m_i описан њеним вектором положаја $\vec{r}_i$ биће:

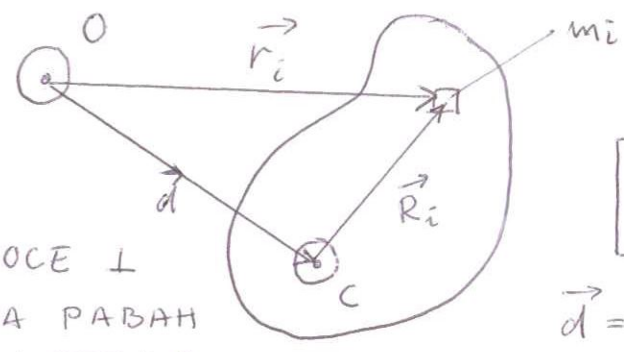
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \text{тј.} \quad x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\sum_i m_i\right)\vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i^{ext}}$$

па је по II Њутновом закону убрзање ЦМ система помножено његовом укупном масом једнако суми свих спољашњих сила.

ШТАЈНЕРОВА ТЕОРЕМА (ТЕОРЕМА О ПАРАЛЕЛНИМ ОСАМА)

је једна од теорема које нам омогућују да знатно проширимо скуп оса за које можемо аналитички рачунати момент инерције. Замислимо тело произвољног облика и претпоставимо да нам је позната вредност момента инерције I_c за неку осу која пролази кроз његов ЦМ. Тада се момент инерције тог тела



осе ⊥ на раван цртежа

за било коју осу паралелну описаној израчунава на прост начин:

$$\boxed{I_o = I_c + md^2}$$ m - маса тела

$\vec{d} = \vec{OC}$ – d растојање те две осе

ДОКАЗ: По дефиницији је: $I_o = \sum_i m_i r_i^2$

$$I_c = \sum_i m_i R_i^2 \qquad \vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{d} \quad \forall i$$

па је: $$I_o = \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i (\vec{R}_i + \vec{d}) \cdot (\vec{R}_i + \vec{d}) =$$

$$= \sum_i m_i R_i^2 + 2\vec{d} \cdot \cancel{\sum_i m_i \vec{R}_i}^{\,0} + d^2 \sum_i m_i$$

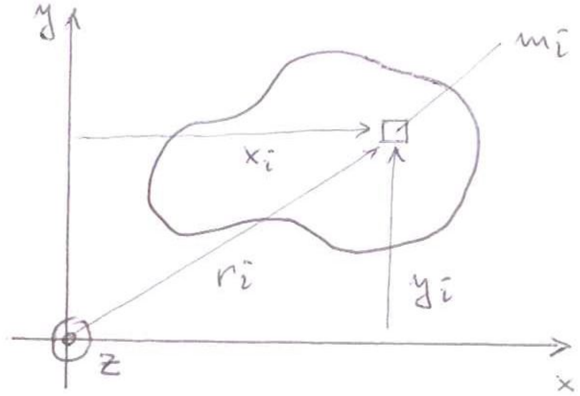
Како је почетак вектора $\vec{R}_i$ на оси кроз ЦМ, средњи члан постаје 0, па је:

$$I_o = I_c + md^2 \quad \text{јер је} \quad \sum_i m_i = m$$

на испиту обавезни примери са вежби

ТЕОРЕМА О НОРМАЛНИМ ОСАМА НЕКА ЈЕ НАШЕ ТЕЛО ТАНКА ПЛОЧА ПРОИЗВОЉНОГ ОБЛИКА КОЈА ЛЕЖИ У xOy РАВНИ. ТАДА СЕ МОЖЕ ДОКАЗАТИ СЛЕДЕЋЕ ТВРЂЕЊЕ: $I_z = I_x + I_y$

ДОКАЗ: СА СЛИКЕ СЕ ВИДИ:

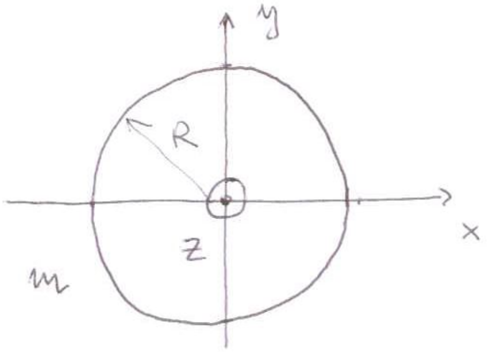


$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum m_i y_i^2 \\ I_y &= \sum m_i x_i^2 \\ I_z &= \sum m_i r_i^2 \end{aligned}\right\}$$ ПО ДЕФИНИЦИЈИ МОМЕНТА ИНЕРЦИЈЕ

КАКО ВАЖИ $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad \forall i$ (АЛИ САМО ЗА ТАНКУ ПЛОЧУ) $\Rightarrow$ ПОСЛЕ МНОЖЕЊА СА m_i И СУМИРАЊА БИЋЕ:

$$\sum m_i y_i^2 + \sum m_i x_i^2 = \sum m_i r_i^2 \Rightarrow \boxed{I_x + I_y = I_z}$$

ПРИМЕНА: ТАНАК ХОМОГЕН ДИСК: РАНИЈЕ ЈЕ ИЗВЕДЕНА РЕЛАЦИЈА $I_z = mR^2/2$ (z-ОСА ЈЕ НОРМАЛНА НА РАВАН ЦРТЕЖА). КАКО ЈЕ ЗБОГ ОЧИГЛЕДНЕ СИМЕТРИЈЕ $I_x = I_y$, НА КРАЈУ ЋЕ БИТИ: $\boxed{I_x = I_y = mR^2/4}$



КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА, МЕХАНИЧКИ РАД И СНАГА ПРИ РОТАЦИЈИ

Кинетичка енергија система МТ једнака је суми кинетичких енергија свих МТ.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2/2 = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega^2/2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

ГДЕ ЈЕ I МОМЕНТ ИНЕРЦИЈЕ ТЕЛА ЗА ДАТУ ОСУ. УКУПАН РАД СВИХ СИЛА КОЈЕ ДЕЛУЈУ НА ТЕЛО ЈЕ:

$dA = \sum \vec{F_i}\, d\vec{r_i}$ $\quad d\vec{r_i}$ ПРОМЕНА ВЕКТОРА ПОЛОЖАЈА ДАТЕ МТ

$$dA = \sum \vec{F_i}\cdot\vec{v_i}\cdot dt = \sum \vec{F_i}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r_i})\,dt =$$
$$= \sum \vec{r_i}\cdot(\vec{F_i}\times\vec{\omega})\,dt = \sum \vec{\omega}\cdot(\vec{r_i}\times\vec{F_i})\,dt$$

ЦИКЛИЧНО ПРАВИЛО ЗА МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД ТРИ ВЕКТОРА

$$\Rightarrow dA = \sum \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}_i \, dt = \vec{\omega} \vec{\mathcal{M}} \, dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{\mathcal{M}}^{int} + \vec{\mathcal{M}}^{ext}) \cdot dt$$

$\Rightarrow dA = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}^{ext}$ ЈЕР ЈЕ РАНИЈЕ ПОКАЗАНО ДА ЈЕ СУМА ИНТЕРНИХ МОМЕНАТА НУЛА. АКО ЈЕ $\vec{\omega} \cdot dt = d\vec{\varphi}$ МОЖЕ СЕ РЕЋИ:

$dA = \vec{\mathcal{M}}^{ext} \cdot d\vec{\varphi} = \mathcal{M}^{ext}_z \cdot d\varphi$ АКО ЈЕ $\vec{\omega} = \omega \vec{e_z}$

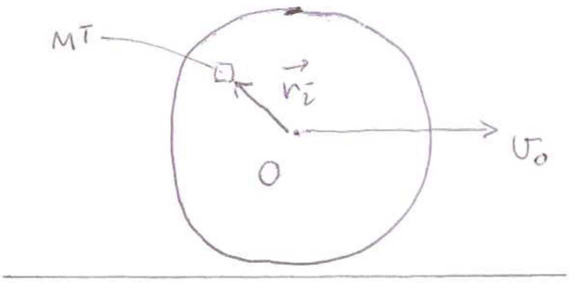
СНАГА ЈЕ БРЗИНА ВРШЕЊА МЕХАНИЧКОГ РАДА:

$$P = \frac{dA}{dt} \begin{cases} \vec{F} \cdot \vec{v} & \text{ЗА ТРАНСЛАТОРНО КРЕТАЊЕ} \\ \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega} & \text{ЗА РОТАЦИОНО КРЕТАЊЕ} \end{cases}$$

СНАГА СЕ ДЕФИНИШЕ ДА БИ СЕ ОЦЕНИЛА ЕФИКАСНОСТ ВРШЕЊА МЕХАНИЧКОГ РАДА.

КОМПЛАНО КРЕТАЊЕ

СПАДА У СЛОЖЕНА КРЕТАЊА КОД КОГА СЕ СВЕ МТ КРУТОГ ТЕЛА КРЕЋУ У ПАРАЛЕЛНИМ РАВНИМА. ПРИМЕР ЈЕ КОТРЉАЊЕ ТОЧКА ПО ПОДЛОЗИ И КАО И СВАКО СЛОЖЕНО КРЕТАЊЕ МОЖЕ СЕ ПРЕДСТАВИТИ КАО КОМПОЗИЦИЈА ТРАНСЛАЦИЈЕ И РОТАЦИЈЕ ОКО НЕКЕ ТРЕНУТНЕ ОСЕ. БРЗИНА СВАКЕ МТ ЈЕ:



$$\vec{v_i} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_i}$$

ПА ЈЕ УКУПНА E_k ЈЕДНАКА:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_i})^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i \cdot \left\{ v_0^2 + 2\vec{v_0} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) + (\vec{\omega} \times \vec{r_i})^2 \right\}$$

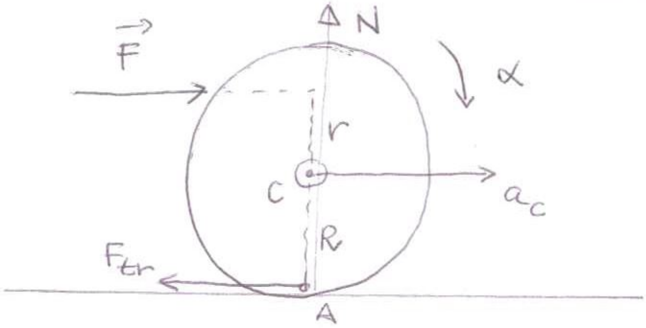
$$= \frac{1}{2} v_0^2 \sum m_i + \vec{v_0} \times \vec{\omega} \sum m_i \vec{r_i} + \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2$$

АКО ОСА РОТАЦИЈЕ ПРОЛАЗИ КРОЗ ЦМ СИСТЕМА СРЕДЊИ ЧЛАН ПОСТАЈЕ 0 ПА ЈЕ:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$

ДАКЛЕ УКУПНА E_k ЈЕ ЗБИР E_k ТРАНСЛАЦИЈЕ ЦМ И E_k РОТАЦИЈЕ ОКО ДАТЕ ОСЕ ИСКЉУЧИВО АКО ТА ОСА ПРОЛАЗИ КРОЗ ЦМ ТЕЛА. ИНАЧЕ ОВО НЕ ВАЖИ.

Динамичка анализа котрљања без клизања (точак)



Транслација ЦМ

$F - F_{tr} = m a_c$ (1)

Ротација око осе кроз C:

$F \cdot r + F_{tr} \cdot R = I \cdot \alpha$ (2)

Ако нема клизања: $v_A = v_c - \omega R = 0 \Rightarrow \dot{v}_c - \dot{\omega} R = 0 \Rightarrow a_c = \alpha R$ (3)

Наведене три релације уз познавање момента инерције I и услов $\underline{F_{tr} < \mu N}$ (сила трења котрљања понаша се као статичко трење јер тачка $\underline{A}$ мирује у односу на подлогу) потпуно описују котрљање без клизања.

Динамичка анализа котрљања са клизањем

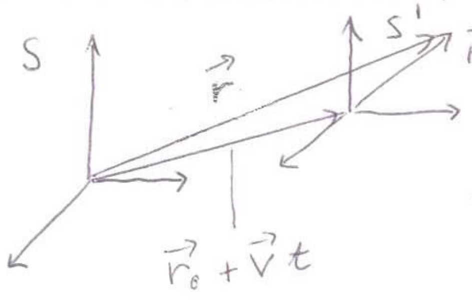
Слика је иста као горе. Сила трења је сад сила трења клизања и важи $\underline{F_{tr} = \mu N}$, али не важи релација (3) од малочас. Релације (1) и (2) важе и даље.

*) Ротација око осе која није фиксна већ слободна представља јако сложен проблем и излази из курса Опште физике. У општем случају вектор $\vec{\omega}$ имаће све три компоненте, а уместо момента инерције за неку осу јавиће се матрица → тензор инерције.

Инерцијални и неинерцијални системи референције

Посматрајмо три система референције S, S', S'':

S – мирује; S' се креће брзином $\vec{V} = const$ у односу на S, S'' се креће убрзањем $\vec{A}$ у односу на S ($\vec{A}$ може и не мора бити константно). Положај МТ се описује векторима положаја $\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}''$ у S, S', S'' респективно. Галилејеве трансформације $\Rightarrow$



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t + \vec{r}' \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{V} + \dot{\vec{r}}' \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}'$$

Са друге стране II Њутнов закон је један од основних закона и као такав мора имати исти математички облик у свим системима референције:

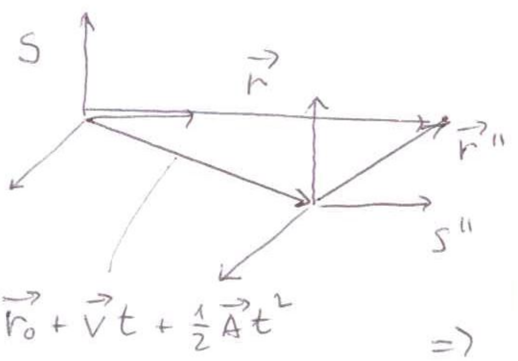
$$S:\ \vec F = m\ddot{\vec r}\ ;\quad S':\ \vec F' = m\ddot{\vec r}'\ ,\quad S'':\ \vec F'' = m\ddot{\vec r}''$$

где је $\vec F, \vec F', \vec F''$ сума свих сила које на МТ делују у S, S', S'' респективно.

Сада је јасно:

$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}' \ /\cdot m \Rightarrow m\ddot{\vec r} = m\ddot{\vec r}' \Rightarrow \vec F = \vec F'$ па је укупна сила која на тело делује у систему S једнака оној која делује у S'. Сви такви системи S' (који се у односу на S крећу са $\vec V = const$) називају се инерцијални системи референције.

Посматрајмо сада системе S, S''. Очигледно је:



$$\vec r = \vec r_0 + \vec V t + \frac{1}{2}\vec A t^2 + \vec r'' \Rightarrow$$

$$\dot{\vec r} = \vec V + \vec A t + \dot{\vec r}'' \Rightarrow \quad \ddot{\vec r} = \vec A + \ddot{\vec r}'' \ /\cdot m$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec r} = m\vec A + m\ddot{\vec r}'' \Rightarrow \quad m\ddot{\vec r}'' = m\ddot{\vec r} + (-m\vec A)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F'' = \vec F + (-m\vec A)}$$

Сви системи S'' који се крећу убрзано називају се неинерцијални системи референције. У њима делују све силе као и у инерцијалним али делује још и додатна сила инерције $\boxed{\vec F_{in} = -m\vec A}$, где је $\vec A$ убрзање система S''.

Пример 1: Када аутомобил убрзава сила која нас приљуби уз наслон седишта је сила инерције; она делује само у систему везаном за аутомобил.

Пример 2: Центрипетална и центрифугална сила. Центрипетална сила је реална сила усмерена ка центру кривине и она „тера" тело да се креће по закривљеној путањи (тј. изазива a_n); делује у свим системима референције. За разлику од ње центрифугална сила је инерцијална сила и делује искључиво у систему везаном за тело које ротира (неинерцијал-

НОМ СИСТЕМУ). ЊИХ ДВЕ СУ ЈЕДНАКЕ ПО ПРАВЦУ И ИНТЕНЗИТЕТУ, АЛИ СУПРОТНОГ СМЕРА. А ПРИРОДА ИМ ЈЕ ПОТПУНО РАЗЛИЧИТА.

СТАТИКА

ДА БИ КРУТО ТЕЛО БИЛО У РАВНОТЕЖИ, А ТО ЗНАЧИ МИРОВАЛО ИЛИ СЕ КРЕТАЛО СТАЛНОМ БРЗИНОМ ($\vec{v} = const$) МОРАЈУ БИТИ ИСПУЊЕНИ СЛЕДЕЋИ УСЛОВИ:

1) РАВНОТЕЖА СВИХ СИЛА: $\sum \vec{F_i} = 0$

2) РАВНОТЕЖА ЊИХОВИХ МОМЕНАТА: $\sum \vec{r_i} \times \vec{F_i} = 0$

ПРИ ТОМЕ, АКО ЈЕ ИСПУЊЕН УСЛОВ 1), СВЕЈЕДНО ЈЕ КОЈА СЕ ОСА УЗИМА ЗА РАЧУНАЊЕ МОМЕНАТА.

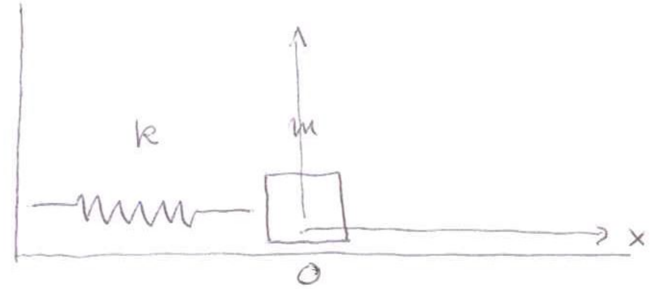
ОСЦИЛАТОРНО КРЕТАЊЕ

ЈЕ КРЕТАЊЕ КОЈЕ СЕ ПОСЛЕ НЕКОГ ВРЕМЕНА (ПЕРИОД T) ПОНАВЉА НА ПОТПУНО ИСТИ НАЧИН. МЕЂУ СВИМ ОСЦИЛАЦИЈАМА ПОСЕБНО МЕСТО ЗАУЗИМАЈУ ХАРМОНИЈСКЕ (sin / cos) И МИ ЋЕМО СЕ У НАШЕМ КУРСУ ЊИМА БАВИТИ. ИЗМЕЂУ ОСТАЛОГ И ЗАТО ШТО ПОСТОЈИ ФУРИЈЕОВА ТЕОРЕМА КОЈА КАЖЕ ДА СЕ СВАКИ ПЕРИОДИЧНИ СИГНАЛ МОЖЕ ПРЕДСТАВИТИ КАО СУПЕРПОЗИЦИЈА ВЕЛИКОГ БРОЈА ХАРМОНИЈСКИХ СИГНАЛА РАЗНИХ ФРЕКВЕНЦИ.

$$f(t) \equiv f(t+T) \quad \forall t \in D_t$$

НЕПРИГУШЕНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

ПОСМАТРАЈМО БЛОК МАСЕ m НА ГЛАТКОЈ ХОРИЗОНТАЛНОЈ ПОДЛОЗИ КОЈИ ЈЕ ВЕЗАН ЕЛАСТИЧНОМ ОПРУГОМ КРУТОСТИ k ЗА ВЕРТИКАЛНИ ЗИД КАО НА СЛИЦИ: ТЕЛО СЕ НАЛАЗИ У КООРДИНАТНОМ ПОЧЕТКУ КАД ЈЕ ОПРУГА НЕДЕФОРМИСАНА (РЕЛАКСИРАНА).



АКО СЕ БЛОК ИЗВУЧЕ ИЗ ОВАКВОГ РАВНОТЕЖНОГ ПОЛОЖАЈА НА ЊЕГА ПОЧНЕ ДА ДЕЛУЈЕ ЕЛАСТИЧНА РЕСТИТУЦИОНА СИЛА:

$F_x^{el} = -kx$, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ (ЈЕР ЈЕ $F_x^{el} = -\frac{dE_p}{dx}$) ГДЕ ЈЕ E_p – ЕЛАСТИЧНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА ОПРУГЕ. САДА ЈЕ:

$m a_x = F_x^{el} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -kx}$ ОВО ЈЕ ЈЕДНАЧИНА ЛИНЕАРНОГ ХАРМОНИЈСКОГ ОСЦИЛАТОРА (ЛХО)

$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ ПО СВОМ ТИПУ ТО ЈЕ ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ЈЕДНАЧИНА II РЕДА СА КОНСТАНТНИМ КОЕФИЦИЈЕНТИМА; ЊЕНО ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ:

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ КРУЖНА (УГАОНА) ФРЕКВЕНЦА

A – АМПЛИТУДА
φ – ПОЧЕТНА ФАЗА
} КОНСТАНТЕ КОЈЕ СЕ ОДРЕЂУЈУ ИЗ ПОЧЕТНИХ УСЛОВА

НАЈЧЕШЋЕ:
$x(0) = \dots$
$\dot{x}(0) = \dots$

ОБЗИРОМ ДА ЈЕ ПЕРИОД ХАРМОНИЈСКИХ ФУНКЦИЈА 2π, ПЕРИОД НАШИХ ОСЦИЛАЦИЈА БИЋЕ:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, $f = \frac{1}{T}$ (Hz) ФРЕКВЕНЦА

БРЗИНА И УБРЗАЊЕ БЛОКА ТАКОЂЕ СЕ МОГУ ИЗРАЧУНАТИ:

$v_x = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$a_x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$

$k = m\omega^2$!!

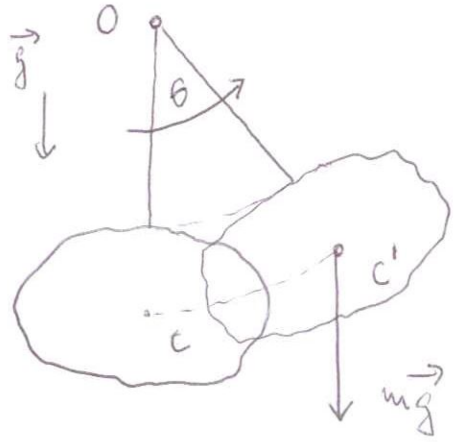
ПРОУЧИМО САДА УКУПНУ ЕНЕРГИЈУ НАШЕГ БЛОКА:

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi) + $$
$$+ \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$

УКУПНА ЕНЕРГИЈА ЛХО НИЈЕ ФУНКЦИЈА ВРЕМЕНА, НЕ МЕЊА СЕ. ЗАТО ЈЕ И АМПЛИТУДА СТАЛНА И НЕМА ГУБИТКА ЕНЕРГИЈЕ, ПА СЕ ЗАТО ОВЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ НАЗИВАЈУ НЕПРИГУШЕНЕ.

ПРИМЕРИ:

1) ФИЗИЧКО КЛАТНО ЈЕ ТЕЛО ПРОИЗВОЉНОГ ОБЛИКА КОЈЕ МОЖЕ ДА ОСЦИЛУЈЕ ОКО НЕКЕ ХОРИЗОНТАЛНЕ ОСЕ ПОД ДЕЈСТВОМ ГРАВИТАЦИОНЕ СИЛЕ.



КАДА СЕ ФИЗИЧКО КЛАТНО ОТКЛОНИ ЗА УГАО $\underline{\theta}$ (ОРЈЕНТИСАНА ВЕЛИЧИНА) ГРАВИТАЦИОНА СИЛА ТЕЖИ ДА ГА ВРАТИ У РАВНОТЕЖНИ ПОЛОЖАЈ:

$\overline{OC} = \overline{OC'} = s$ – РАСТОЈАЊЕ ЦЕНТРА МАСЕ ~~ОД~~ ОСЕ РОТАЦИЈЕ

$$I\alpha = M_\theta \Rightarrow I\ddot{\theta} = -mgs \cdot \sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgs}{I}\sin\theta = 0$$

ОВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА НЕМА АНАЛИТИЧКО РЕШЕЊЕ. АЛИ ЗА ИЗВЕСТАН БРОЈ ПРАКТИЧНИХ СЛУЧАЈЕВА ВАЖИЋЕ $\underline{\sin\theta \simeq \theta}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgs}{I}\cdot\theta = 0}$$

ЈЕДНАЧИНА ЛХО $\qquad \omega = \sqrt{\frac{mgs}{I}}$

ЊЕНО ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ:

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ПА ЈЕ САД ПЕРИОД ОСЦИЛОВАЊА ФИЗИЧКОГ КЛАТНА:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}}$$

<u>ЗАНИМЉИВО ПИТАЊЕ:</u> КОЛИКО МАЛИ МОРА БИТИ $\underline{\theta}$ ДА БИ ВАЖИЛО $\sin\theta \simeq \theta$. УЗМИМО $\theta = \pi/6 = 0{,}523$ $\quad \sin\frac{\pi}{6} = 0{,}500$ РЕЛАТИВНА ЊИХОВА РАЗЛИКА МАЊА ЈЕ ОД 5%. ДАКЛЕ ЗА ГРУБЕ ПРОЦЕНЕ СМЕЛО БИ СЕ ИЋИ ЧАК И ДО ТЕ ВРЕДНОСТИ.

2) <u>МАТЕМАТИЧКО КЛАТНО</u> – МАТЕРИЈАЛНА ТАЧКА МАСЕ $\underline{m}$ ОКАЧЕНА О КОНАЦ ДУЖИНЕ $\underline{l}$ И ОСЦИЛУЈЕ ОКО ХОРИЗОНТАЛНЕ ОСЕ: $\quad I = ml^2$ (МТ) $\quad s \simeq l \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$ (КОРИШЋЕН ЈЕ ИЗВЕДЕНИ ИЗРАЗ ЗА ФИЗИЧКО КЛАТНО) $\Rightarrow$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ (НЕ ЗАВИСИ ЕКСПЛИЦИТНО ОД МАСЕ МТ)

<u>Пригушене осцилације</u>

НЕКА НА НАШ БЛОК ПОРЕД ЕЛАСТИЧНЕ СИЛЕ $F_x^{el} = -kx$ ДЕЛУЈЕ

И ОТПОРНА СИЛА ОБЛИКА $F_x^{otp} = -b\cdot\dot{x}$ (СРАЗМЕРНА БРЗИНИ БЛОКА): $\Rightarrow$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

КОНСТАНТНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ

ОВО ЈЕ ОПЕТ ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ЈЕДНАЧИНА II РЕДА.

АЛИ ОНА ВИШЕ НЕ ОПИСУЈЕ ЛХО И АНАЛИЗА ЊЕНИХ РЕШЕЊА ЈЕ ДАЛЕКО СЛОЖЕНИЈА; УВЕДИМО НОВЕ ОЗНАКЕ:

$\frac{b}{2m} = \alpha$ – КОЕФИЦИЈЕНТ ПРИГУШЕЊА (АМОРТИЗАЦИЈЕ)

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ – СОПСТВЕНА КРУЖНА ФРЕКВЕНЦА

ГОРЊА ЈЕДНАЧИНА ПОСТАЈЕ: $\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ И ЊЕНА РЕШЕЊА ТРАЖЕ СЕ У ОБЛИКУ: $x = e^{\lambda t}$ $(\dot{x} = \lambda e^{\lambda t},\ \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}) \Rightarrow$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + 2\alpha\lambda \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0}$ ОВА КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА НАЗИВА СЕ КАРАКТЕРИСТИЧНОМ ЈЕДНАЧИНОМ ГОРЊЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ; ЊЕНИ КОРЕНИ СУ $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ И СХОДНО ТОМЕ РАЗЛИКУЈЕМО ТРИ ТИПА РЕШЕЊА:

1) $\alpha > \omega_0 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $\lambda_{1,2} \in R \Rightarrow$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

ОВДЕ НЕМА НИ ТРАГА ОД ОСЦИЛАЦИЈЕ И ОВАКВО РЕШЕЊЕ НАЗИВА СЕ <u>АПЕРИОДИЧНО</u>

2) $\alpha = \omega_0 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha$ $\quad \lambda_{1,2} \in R \Rightarrow$

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} + B\cdot t\cdot e^{-\alpha t}$$

ОВАКВО КРЕТАЊЕ НАЗИВА СЕ <u>КРИТИЧНО АМОРТИЗОВАНО</u>.

ВАЖНО ЈЕ НАПОМЕНУТИ ДА СЕ У ОВОМ СЛУЧАЈУ БЛОК <u>НАЈБРЖЕ</u> ВРАЋА У РАВНОТЕЖНИ ПОЛОЖАЈ. ЈОШ УВЕК <u>НИЈЕ ОСЦИЛАЦИЈА</u>.

3) $\omega_0 > \alpha > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm i\omega$

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ САДА: $\boxed{x(t) = \underbrace{Ae^{-\alpha t}}_{\text{АМПЛИТУДА КОЈА ОПАДА}} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{\text{ХАРМОНИЈСКИ (ОСЦИЛАТОРНИ) ЧЛАН}}}$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$

$\Rightarrow$ $x(t) =$ (АМПЛИТУДА КОЈА $\searrow$) $\times$ ХАРМОНИЈСКИ ЧЛАН

ЗАТО ШТО АМПЛИТУДА ОПАДА ОВЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СЕ НАЗИВАЈУ ПРИГУШЕНЕ. ДЕФИНИШУ СЕ ДВА ПАРАМЕТРА КОЈИ ОПИСУЈУ СТЕПЕН ТЕ АМОРТИЗАЦИЈЕ:

1) ЛОГАРИТАМСКИ ДЕКРЕМЕНТ

$$\delta \overset{\text{деф}}{=} \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{Ae^{-\alpha t}}{Ae^{-\alpha(t+T)}} = \ln e^{\alpha T} = \alpha T$$

2) ФАКТОР ДОБРОТЕ (Q - ФАКТОР)

$E(t)$ - УКУПНА ЕНЕРГИЈА ОСЦИЛАТОРА

$$Q \overset{\text{деф}}{=} 2\pi \frac{E(t)}{E(t)-E(t+T)} = 2\pi \frac{\frac{1}{2}k\left(Ae^{-\alpha t}\right)^2}{\frac{1}{2}k\left(Ae^{-\alpha t}\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(Ae^{-\alpha(t+T)}\right)^2} =$$

$$= 2\pi \frac{e^{-2\alpha t}}{e^{-2\alpha t} - e^{-2\alpha(t+T)}} = 2\pi \frac{1}{1-e^{-2\alpha T}}$$

РАЗЛИКУЈЕМО ДВА ВАЖНА (ГРАНИЧНА) СЛУЧАЈА:

а) $\alpha T >> 1$ $\quad Q \simeq 2\pi$ $\quad$ ЈАКО ПРИГУШЕЊЕ

б) $\alpha T << 1$ $\quad Q \simeq \frac{2\pi}{1-(1-2\alpha T)} \simeq \frac{2\pi}{2\alpha T} = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha T} >> 1$

ЈЕР ЈЕ $e^{-2\alpha T} \simeq 1 - 2\alpha T$ $\quad$ СЛАБО ПРИГУШЕЊЕ

ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ

НЕКА ПОРЕД ЕЛАСТИЧНЕ СИЛЕ $F_x^{el} = -kx$ И СИЛЕ ОТПОРА ОБЛИКА $F_x^{otp} = -b\dot{x}$ ДЕЛУЈЕ И ПОТПУНО АУТОНОМНА СИЛА $F_x(t)$. АУТОНОМНА ЗНАЧИ ДА ЊЕНИМ ОБЛИКОМ УПРАВЉАМО МИ ПО СВОЈОЈ ЖЕЉИ. ЈЕДНАЧИНА ПО II ЊУТНОВОМ ЗАКОНУ ТАДА ЈЕ:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_x(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_x(t)}{m}$$

ШТО УЗ ОЗНАКЕ УВЕДЕНЕ У ПРОШЛОМ ПОГЛАВЉУ ПОСТАЈЕ:

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f_x(t), \quad f_x(t) = F_x(t)/m$$

ОВА ЈЕДНАЧИНА ЈЕ НЕХОМОГЕНА (АУТОНОМНИ ЧЛАН СА ДЕСНЕ СТРАНЕ $\neq 0$). ПОШТО ЈЕ ЈЕДНАЧИНА ЛИНЕАРНА ЊЕНО ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ ОБЛИКА: $(\omega_0 > \alpha)$

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + x_p(t)$$

ГДЕ ЈЕ $x_p(t)$ ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ НЕХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, ТЈ. БИЛО КОЈА ФУНКЦИЈА (БЕЗ КОНСТАНТИ) КОЈА ЗАДОВОЉАВА НЕХОМОГЕНУ ЈЕДНАЧИНУ. ЗА НАШУ ПРАКСУ ПОСЕБНО СУ ВАЖНА ДВА ОБЛИКА $f_x(t)$:

1) $f_x(t) = f = \text{const} \Rightarrow \ddot{x}_p + 2\alpha\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = f$

ЊЕНО РЕШЕЊЕ ТРАЖИМО У ОБЛИКУ: $x_p(t) = D = \text{const}$ ($\dot{x}_p = 0$, $\ddot{x}_p = 0$) ПА ЈЕ: $D \cdot \omega_0^2 = f \Rightarrow D = f/\omega_0^2$ И ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + f/\omega_0^2$$

ОВАКВА ПРИНУДНА СИЛА НЕ МЕЊА КАРАКТЕР ОСЦИЛАЦИЈА, ВЕЋ САМО МЕЊА (ПОМЕРА) ПОЛОЖАЈ РАВНОТЕЖЕ.

2) ПРИНУДНА СИЛА ОБЛИКА $f_x(t) = f_0 \cos \Omega t$. КРУЖНУ ФРЕКВЕНЦИЈУ ПРИНУДНЕ СИЛЕ Ω МИ БИРАМО. $x_p(t)$ ТРАЖИМО У ОБЛИКУ:

$$x_p(t) = A_p \cos(\Omega t - \psi) \Rightarrow \dot{x}_p = -A_p \Omega \sin(\Omega t - \psi)$$

$$\ddot{x}_p = -A_p \Omega^2 \cos(\Omega t - \psi)$$ ПА ЈЕДНАЧИНА ПОСТАЈЕ:

$$\ddot{x}_p + 2\alpha\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = f_0 \cos \Omega t$$ ОДНОСНО:

$$-A_p\Omega^2 \cdot \{\cos\Omega t \cos\psi + \sin\Omega t \sin\psi\} - 2\alpha A_p \Omega \cdot \{\sin\Omega t \cos\psi - \cos\Omega t \sin\psi\} + \omega_0^2 A_p \{\cos\Omega t \cos\psi + \sin\Omega \sin\psi\} \equiv f_0 \cos\Omega t, \ \forall t$$

ДА БИ ОВО БИЛО ИСПУЊЕНО ЧЛАНОВИ УЗ $\underline{\cos\Omega t}$ И УЗ $\underline{\sin\Omega t}$ СА ЛЕВЕ И СА ДЕСНЕ СТРАНЕ МОРАЈУ БИТИ ЈЕДНАКИ:

УЗ $\cos\Omega t$: $\quad A_p(\omega_0^2-\Omega^2)\cdot\cos\psi + 2\alpha A_p\sin\psi = f_0$

УЗ $\sin\Omega t$: $\quad A_p(\omega_0^2-\Omega^2)\sin\psi - 2\alpha A_p\cos\psi = 0$

ОВО ЈЕ СИСТЕМ 2×2 (НЕПОЗНАТЕ A_p, ψ) ЧИЈЕ ЈЕ РЕШЕЊЕ:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\psi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}}, \qquad \boxed{A_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\alpha\Omega)^2}}}$$

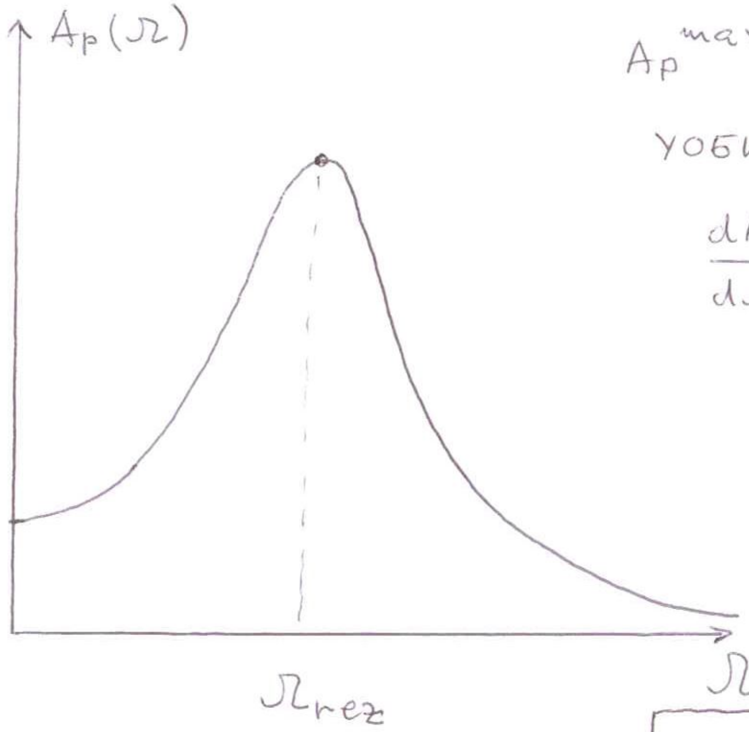
(ОВАЈ РАЧУН СЕ НА ИСПИТУ МОРА ДО КРАЈА ДЕТАЉНО ИЗВЕСТИ)

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ САДА:

$$\boxed{x(t) = A e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega t+\varphi) + A_p\cos(\Omega t-\psi)}$$

ГДЕ ЈЕ $A_p(\Omega)$ АМПЛИТУДА ПРИНУДНИХ ОСЦИЛАЦИЈА. ПОСЛЕ ДОВОЉНО ДУГО ВРЕМЕНА (ЗБОГ ЧЛАНА $e^{-\alpha t}$) ПРВИ САБИРАК НЕСТАНЕ И У УСТАЉЕНОМ РЕЖИМУ ОСТАНЕ САМО ПРИНУДНА ОСЦИЛАЦИЈА (ДРУГИ ЧЛАН).

РЕЗОНАНЦА: $A_p(\Omega)$ ИМА ОБЛИК РЕЗОНАНТНЕ КРИВЕ:



$A_p^{max} = A_p(\Omega_{rez})$ ТРАЖИ СЕ УОБИЧАЈЕНО:

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \boxed{\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2-2\alpha^2}}$$

РЕЗОНАНТНА КРУЖНА УЧЕСТАНОСТ

$$A_p^{rez} = A_p(\Omega_{rez}) \Rightarrow$$

$$\boxed{A_p^{rez} = \frac{f_0}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}}}$$

(И ОВДЕ СВИ РАЧУНИ НА ИСПИТУ ДО КРАЈА)!!